EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

april 07

nr 6

jaargang 82

Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?

Rekenen in het vo

Somgetallen, priemgetallen en machten van 2

Nieuwe vorm en inhoud van wiskunde C

Examenbesprekingen 2007

2007−1707 = Euler





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

april
07
nr 6
jaargang 82

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Inzendingen bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur: Marja Bos,
Koematen 8, 7754 NV Wachtum
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.de-kleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 63 78
E-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris

Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
Tel. (038) 444 70 17
E-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 50,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 26,50
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 55,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver,
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
Tel. (0318) 54 22 43
E-mail: g.de.kleuver@nvvw.nl

Kort vooraf [Marja Bos]

Eén wiskundemeisje

Op 22 maart kwam de 15-jarige Petra Alkema in het nieuws. Samen met de 17-jarige scholieren Willem Schilte en Jesse Hoekstra ontwierp zij een heel bijzonder magisch vierkant van 12 bij 12, *bijna* het lang gezochte Franklin-vierkant. Een mooie prestatie! Dat gebeurde naar aanleiding van een masterclass Magische Vierkanten van Arno van den Essen van de Radboud Universiteit Nijmegen waaraan deze drie scholieren deelnamen. Petra bezoekt het Gymnasium Bernrode te Heeswijk-Dinther, Willem en Jesse het Dominicus College te Nijmegen. Masterclass-docent Arno van den Essen betitelt hun ontwerp als 'het meest magische vierkant ooit'.
Vrouwen en wiskunde, wie zei er ook al weer…?
Opvallend: NOVA besteedde in de desbetreffende tv-reportage vooral aandacht aan het feit dat Petra er - als wiskundetalent - zo 'gewoon' uitziet. Geen puistjes, geen bril. (Hmm… Misschien moet ik dan toch maar eens die contactlenzen aanschaffen?)

Twéé wiskundemeisjes

En kende u 'de' wiskundemeisjes al? Ionica Smeets en Jeanine Daems, promovendi aan de Universiteit Leiden, houden al een jaar een fantastische weblog bij: *www.wiskundemeisjes.nl.* Speels, origineel én informatief, en ook zeer aan te bevelen voor uw leerlingen of studenten! Op 20 maart werden de wiskundemeisjes in het kader van de *Dutch Bloggies* eerste, in zowel de categorie 'beste themalog' als die van 'best geschreven weblog'. Gefeliciteerd! En wát een goeie reclame voor de wiskunde… Niet zo vreemd als u weet dat Ionica Smeets onze nationale PR-medewerker wiskunde is, met als taak: 'beeldvorming van de wiskunde in positieve zin bevorderen, en actieve nieuwsgaring en -verspreiding over de wiskunde en haar toepassingen'. Dat PR-medewerkerschap is een aantal jaren geleden overigens in het leven geroepen door de NVvW, het KWG en Kennislink.

Meisjes en wiskunde

Tijdens mijn verhuizing kwam ik bij het in- en uitpakken van m'n spullen een hele reeks publicaties tegen die ik vooral in de 70'er en 80'er jaren verzamelde over het onderwerp 'meisjes en wiskunde'. Destijds was dat echt een issue; de Vereniging kende bijvoorbeeld een actieve werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde'. Uiteindelijk stierf die werkgroep een zachte dood - wegens tanende belangstelling, meen ik me te herinneren. Maar is 'het probleem' uit de wereld? Ik vrees van niet; het verschil in bijvoorbeeld keuzegedrag tussen jongens en meisjes is er nog steeds, maar wordt hooguit minder als probleem ervaren. Hoe gaat dat bij u op school, met bijvoorbeeld de aantallen meisjes en jongens bij wiskunde A en B?

In dit nummer

Frank van Merwijk en Harrie Sormani belichten de maatschappelijke discussie rond rekenvaardigheden van pabo-studenten. Zij bepleiten dat er in het voortgezet onderwijs tijd en aandacht besteed wordt aan het onderhouden (en uitbouwen) van de bestaande rekenvaardigheid van leerlingen, en spreken hun zorg uit over het 'papieren onderwijs' waar veel wiskundelessen in dreigen te ontaarden. Als individuele zelfwerkzaamheid de boventoon voert en interactie grotendeels ontbreekt, dan blijft er maar weinig 'hangen' van de leerstof, en kan de doorsneeleerling amper enige diepgang bereiken.
Binnen het wiskundeonderwijs in Nederland doen we eigenlijk verbazend weinig aan getaltheorie, terwijl dat onderwerp toch ontegenzeglijk veel elegante en relatief eenvoudige wiskunde bevat. Veel van onze leerlingen komen niet eens in aanraking met de doodgewone priemgetallen! Rob van der Waall en Roger Hendrickx bespreken in hun bijdrage een fraai resultaat over priemgetallen, machten van 2 en zogeheten somgetallen. De wiskunde erachter is (met enig doorzetten, dat wel) door menig vwo-leerling te doorgronden: voor dit soort wiskunde is nauwelijks voorkennis nodig!
Driehonderd jaar geleden werd de geniale wiskundige Euler geboren. Misschien is het een aardig idee om tijdens de wiskundeles zijn 'verjaardag' te vieren? Dat kan al heel eenvoudig met een anekdote over Eulers enorme productie ondanks zijn voortschrijdende blindheid, en aandacht voor een stukje 'Euleriaanse' wiskunde. Keus genoeg! Jan van Maanen eert de 300-jarige in dit nummer van Euclides met een zoektocht naar mogelijke wortels van zijn werk in Nederland.

Inhoud

205 Kort vooraf
[Marja Bos]
206 'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?'
Aflevering 2a: Cecile Eikenaar
[Joke Verbeek]
208 Speurwerk naar de driehonderdjarige Euler
[Jan van Maanen]
210 'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?'
Aflevering 2b: Loek Hermans
[Hans Daale]
213 Ik las en dacht…
[Klaske Blom]
217 Een vernieuwd statistiekprogramma, deel 2
[Anne van Streun, Carel van de Giessen]
222 (Wis)kundig kiezen / De Alabama Paradox
[Rob Bosch]
225 Rekenen in het voortgezet onderwijs als voorbereiding op de pabo
[Frank van Merwijk, Harrie Sormani]
228 Leesbaarheid gevangen in formules?
[Gerard Koolstra]
232 Parate kennis en algebra / Aflevering 4: Formules maken en interpreteren
[Anne van Streun]
234 Somgetallen, priemgetallen en machten van 2, deel 1
[Rob van der Waal, Roger Hendrickx]
237 Boekbespreking / Basisvaardigheden wiskunde voor het HTO
[Peter van der Velden]
238 Boekbespreking / Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde
[Ernst Lambeck]
240 Van de bestuurstafel
[Wim Kuipers]
240 Verschenen
241 Examenbesprekingen 2007
[Conny Gaykema]
242 Recreatie
[Frits Göbel]
244 Servicepagina
245 Verschenen

'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?'

AFLEVERING 2A: INTERVIEW MET ONDERWIJZERES CECILE EIKENAAR

[Joke Verbeek]

'Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?' Hoe kijken volwassenen terug op hun vroegere wiskundelessen? Met plezier, met afgrijzen? Was het zinvol? Wat bleef ervan over, met andere woorden: welke betekenis en welke zin bleek dat wiskundeonderwijs al dan niet te hebben, later in hun leven? En wat gebruiken mensen in hun werk nog van die op school geleerde wiskunde?
In het vorige nummer van Euclides startte de redactie een korte serie interviews waarvoor deze vragen de basis vormden. In die eerste aflevering las u een weerslag van de reacties van een willekeurige groep voorbijgangers [1]. Dit keer gaat het om twee wat langere interviews.
Allereerst nodigen we u uit om te lezen hoe onderwijzeres Cecile Eikenaar denkt over het opleiden van basisschoolleerkrachten en over onderwijs in het algemeen. Het andere interview kunt u verderop in dit nummer vinden, vanaf pagina 210.

Personalia
Naam: Cecile Eikenaar
Leeftijd: 32
Beroep: onderwijzeres
Opleiding: mavo-havo-pabo
Aantal jaren wiskundeonderwijs: 2
Cecile is een mens met uitgesproken meningen en ze kan ze nog onderbouwen ook. Ze heeft de pabo gedaan en omdat het niveau van de pabo-afgestudeerden de laatste tijd nogal in de belangstelling staat, leek het geen slecht idee eens de mening van zo'n afgestudeerde te vragen. Cecile geeft 12 jaar les in het basisonderwijs. Ze werkt parttime omdat ze twee jonge kinderen heeft.

Voor de vuist weg

Op mijn vraag: 'Als ik zeg wiskunde, wat zeg je dan?' reageert ze direct en zeer beslist met een hartgrondig: 'Moeilijk!' Ze herinnert zich dat het in de brugklas van de havo nog best goed ging, maar dat het in de tweede echt rampzalig was. 'Al die haakjes, punten en komma's, ik snapte het echt niet en had een 3 op mijn rapport. Ik kreeg er een trauma van, zo verschrikkelijk vond ik het. Zelfs bijles hielp niet, dus ben ik na het tweede jaar havo naar de mavo gegaan, zonder wiskunde.'

Gecijferdheid

Toch is Cecile niet ongecijferd gebleven: toen ze les moest geven aan leerlingen van groep 7 en 8, heeft ze alsnog goed leren rekenen. Met het lezen van tabellen, grafieken en schema's heeft ze nooit moeite gehad: dat ging vanzelf. Ze ervaart dat ook niet als wiskunde. 'Volgens mij kon ik dat altijd al; ik heb het niet op school geleerd.' Ze ziet het belang van het werken met procenten, verhoudingen en breuken wel in en heeft haar eigen gebrekkige kennis van de wiskunde, met name het rekenen, wel degelijk als negatief ervaren. Als ze de kinderen iets moest leren dat ze zelf niet goed beheerste, was dat lastig. Ze kon met name de betere leerlingen de eerste jaren niet goed helpen in de ontwikkeling van hun rekenvaardigheden. 'Een slechte zaak', vindt ze nu nog.
Ook op de basisschool mogen leerlingen soms een rekenmachine gebruiken. Cecile daarover: 'Sommige kinderen kunnen heel slecht rekenen. Met name breuken en delingen begrijpen ze gewoon niet. Het is heerlijk voor ze, dat ze dat dan op een gegeven moment met de rekenmachine mogen doen. Ik leer ze liever die rekenmachine goed te gebruiken, dan dat we blijven worstelen met de tafels en de breuken. Overigens staat het werken met de rekenmachine gewoon in de rekenmethode die we op school gebruiken, dus het hoort er gewoon bij.'

Huidig werk

Cecile geeft dit jaar les aan leerlingen van groep 6, 7 en 8, maar in het verleden heeft ze ook in lagere leerjaren en in het speciaal onderwijs gewerkt.
'Ik vind dat mijn vooropleiding me niet voldoende heeft voorbereid op het geven van rekenlessen. Ik mis toch wat aan de kenniskant. Ik had het wel graag beter willen kunnen.' Ze heeft om haar kennis op te vijzelen een cursus gedaan over rekenonderwijs aan de 'beginners' van groep 3. Omdat ze op dit moment bovenbouwklassen heeft, overweegt ze een cursus 'Rekenstrategieën in de bovenbouw' te gaan volgen om de rekenstof van die leerjaren beter te begrijpen.
Vooral met meetkundige vraagstukken heeft ze moeite. Dat weet ze wel te ondervangen door elke les goed voor te bereiden met het antwoordenboekje bij de hand, maar ze vindt het prettiger om iets verder boven de stof te staan. Ze ziet het niet zitten om alsnog haar wiskundeniveau omhoog te krikken. Ze weet eigenlijk niet wat er



Cecile Eikenaar

allemaal bij wiskunde hoort, maar als ik haar dat vertel, weet ze onmiddellijk dat ze dat niet wil. Alleen de kennis die direct nodig is voor het lesgeven, is genoeg.
'Ik heb niets gehad aan de (weinige) wiskundelessen op de middelbare school, maar voor mijn taallessen is het erg prettig dat ik vreemde talen spreek. Er zijn veel leenwoorden en woorden uit de technische wereld die uit andere talen komen, met name uit het Engels en het Frans. Daar heb ik wél veel aan gehad.'
Het valt Cecile op dat de leerlingen tegenwoordig leren hoe ze werkstukken moeten maken, hoe ze stukken tekst kunnen leren. 'Wij moesten het vroeger gewoon doen, nu leren ze stap voor stap hoe ze het aan moeten pakken. Dat is een hele verbetering. Maar voor de zwakke leerlingen is het nog steeds moeilijk.'

Wiskunde op school; vroeger

'Meneer Leeuwis heeft er veel energie in gestopt om mij wiskunde te leren. Ik heb zo'n idee dat het hem nog meer speet dan mij, als hij mij wéér een 2 moest geven voor een proefwerk. Wij maakten samen veel sommen en dan kon ik uiteindelijk de sommetjes uit het boek wel maken, maar die van het proefwerk waren weer compleet een verrassing voor me. Ook de reguliere les bestond uit voordoen en nadoen, en daar stak ik dus niets van op.
Van de Stelling van Pythagoras herinner ik mij niets. Is dat hetzelfde als pi? Nee? Nou, ik weet het echt niet.'

Rekenspecialist

Over wiskunde en de toekomst heeft Cecile geen mening, daarvoor vindt ze zelf dat ze te weinig van het onderwerp afweet. Wel heeft ze ideeën over wat ze zou veranderen als ze minister van onderwijs zou zijn.
'Ook in het basisonderwijs moeten specialisten gaan lesgeven. Wij moeten veel te veel kunnen, dat is gewoon niet te doen. Laat elke school een specialist hebben voor het rekenen, maar ook voor aardrijkskunde of muziek, net zoals dat nu bij gymnastiek het geval is, dan worden ook de slimmere kinderen beter bediend. Dat is kwaliteitsverhogend volgens mij.
Verder zou ik aan de scholen zelf vragen wat ze vinden wat ze nodig hebben en waarom, dat kunnen ze zelf toch het beste weten!
En ik zou de schooltijden aanpassen. Voor elke school een continu rooster, dus zonder lange middagpauze. En meer lestijd, niet 5½ uur per dag, maar 6, om ook de creatieve vakken meer tijd te geven. En weer extra tijd voor taalzwakke leerlingen om de woordenschat te verbeteren.'

Opleiding verbeteren

Het interview lijkt afgelopen, maar Cecile heeft nog een dringende boodschap: 'Ik zou wel eens willen weten hoe ik het voor elkaar moet krijgen de pabo te verbeteren. Ik leerde daar niets bij, op geen enkel gebied; alleen de randvoorwaarden leken belangrijk. Maar ik vind het gek dat ik van aardrijkskunde niets wist, het zat namelijk niet in mijn vakkenpakket op de havo, terwijl ik er wel les in moet geven. Dat kan echt niet goed zijn. Ik zie ook nog te vaak dat een student van wie de stage mislukt toch met een diploma van school gaat.
Dat kan anders, bijvoorbeeld door een beginnende onderwijzer een 'proefdiploma' te geven. Pas bij bewezen geschiktheid en voldoende kennis moet het proefdiploma worden vervangen door een echt diploma. Misschien dat dan de kwaliteit van het basisonderwijs omhoog gaat.'

Met het gevoel dat er nog veel meer over deze kwestie te zeggen valt, beëindigen we toch het interview – ook al omdat de jongste telg aangeeft dringend moeders hulp nodig te hebben. Met Cecile als minister kan het onderwijs dus in ieder geval rekenen op een verbeterde pabo en meer lestijd op de basisschool, en misschien is dat wel een goed begin voor veel verbeteringen…

Noot

[1] Klaske Blom e.a.: *Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?* In: *Euclides*, 82(5), maart 2007

Over de interviewer

Joke Verbeek is lid van de redactie van Euclides en docent op het Arentheem College (locatie Middachtensingel, voor vmbo-GT en havo) te Arnhem.
E-mailadres: *jokeverbeek@chello.nl*

Speurwerk naar de driehonderdjarige Euler

[Jan van Maanen]



300 jaar geleden
Waarom is 2007 eigenlijk geen Euler-jaar? De driehonderdste geboortedag van Leonhard Euler op 15 april van dit jaar geeft er alle aanleiding voor (zie voor feestelijkheden bijvoorbeeld *www.euler-2007.ch*). Misschien komt het wel doordat hij op 5 april 1707 geboren werd. Want in zijn geboortestad Basel gold toen nog de oude, Juliaanse kalender, en die liep in 1707 tien dagen achter op de Gregoriaanse kalender die we nu hebben. Op veel plaatsen dateerde men brieven bijvoorbeeld met een dubbele datum. Daar zou Eulers geboortedag dus geschreven zijn als $\frac{5}{15}$ april 1707.

Geheugentest
Ik ga een kleine zoektocht naar Euler ondernemen, uit respect voor de driehonderdjarige, en als advies voor al diegenen die dit jaar zelf wat over Euler zouden willen uitzoeken. Ik begin met een herinnering, diep in mijn achterhoofd, dat Euler in de verte iets met Nederland had, via een publicatie in een Nederlands tijdschrift. Er staat me ook bij dat het ging over de som $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ Euler maakte in 1735 furore door te bewijzen dat de som gelijk is aan $\frac{\pi^2}{6}$. Wat ik wil uitzoeken is of hij dit inderdaad ergens in Nederland publiceerde. Een soort geheugentest maar tegelijk dus een klein eerbetoon aan ons grote voorbeeld.

Zoeken naar Euler
Waar kijk je als eerste als je iets over Euler zoekt? Lange tijd was dat lastig. Steven Engelsman heeft daar eens een mooi overzicht over geschreven[1], in de tijd dat er nog net geen WorldWideWeb was. Je had naslagwerken nodig, en veel daarvan waren op zijn zachtst gezegd obscuur. Een vroeg twintigste-eeuwse supplementband van het *Jahrbuch* van de *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, daarin stond van de hand van Eneström de lijst van Eulers publicaties, met de Eneström-nummers. Met die E-nummers werden en worden Eulers publicaties nog steeds aangeduid. Tegenwoordig is het zoeken van gegevens over Euler een stuk gemakkelijker geworden. We danken dat aan het afstudeerwerk van twee Amerikaanse master-studenten wiskunde, die op het Web een digitaal Euler-archief hebben ingericht: *www.EulerArchive.com.*
Het archief heeft een groot aantal ingangen. Je kunt zoeken op *Onderwerp*, *Datum*, *Publicatiemedium* (hier kun je bijvoorbeeld de boeken apart vinden, en de artikelen in het tijdschrift van de Academie van Sint Petersburg en in de andere tijdschriften van die tijd), *Eneström-nummer*, *Trefwoord*, en tenslotte het totale beschikbare *Bronnenmateriaal* (waaronder zeer veel digitale opnamen van 18de-eeuwse bronnen).

Zoeken naar de publicatie
Ik dacht slim te zijn. In een eerder stukje over Euler[2] had ik Eulers wijze van sommeren van de inverse kwadraten beschreven. Hij loste het probleem in 1735 op. Zoeken op *Datum* was mijn eerste poging. Maar… in die tijd duurde het soms vijf jaar of meer voordat een ingeleverd artikel verscheen. En aangezien bij snel kijken *Datum* lijkt te slaan op het jaar van verschijnen, was dit geen goede keuze, want Euler schreef nogal wat in deze periode. Dat is wel spannend om te zien, want bijvoorbeeld in 1736 (hij was toen dus 28 of 29!) verscheen zijn *Mechanica*-leerboek in twee delen. Bij rustiger kijken blijkt er bij *Datum* ook een keuze voor het jaar van schrijven te zijn; langs die weg had ik het waarschijnlijk ook gevonden, maar dat zag ik pas toen ik de oplossing al had.
Euler was en bleef zijn hele leven op zeer veel terreinen tegelijk actief. In dezelfde tijd deed hij, als dienst aan de tsaar, ook werkzaamheden voor het samenstellen van de Russische landkaart. De vroege blindheid, in 1738, aan zijn rechteroog wordt direct aan het belastende cartografische werk toegeschreven. In 1766 werd Euler volledig blind en tóch bleef hij enorm productief, door zijn gedachten te dicteren.

Snel van strategie veranderen, ook om te voorkomen dat ik te veel aan het lezen sloeg in de chronologische lijst; ik stap over op het trefwoord *squares*. Dat levert ongeveer 50 treffers op, en inderdaad: één ervan (E61) gaat over het sommeren van inversen van machten van de natuurlijke getallen. Er verschijnt meer interessants, ook de eerste publicatie van de oplossing in E41, maar ik kijk verder bij E61.

Gevonden!

Als ik op de titel van E61 klik, verschijnt allerlei informatie over het artikel: de complete titel in het Latijn, de plaats waar het verscheen (het tijdschrift van de Akademie in Berlijn, waar Euler van 1741 tot 1766 werkte; het is dus niet wat ik zoek, althans E61 heeft geen verband met Nederland), en aanvullende informatie.
En die maakt dit archief zo waardevol, want een bron waarnaar verwezen wordt, is de reeks die Ed Sandifer voor de Mathematical Association of America schreef onder de titel '*How Euler did it*'[3].

Die maandelijkse stukjes zijn een lust voor de Euler-liefhebber en voor de liefhebber van creatieve wiskunde. Bij E61 is er een link naar Sandifers artikel in pdf-uitvoering uit maart 2004 getiteld *Basel Problem with Integrals*. Het sommeren van de inverse kwadraten heette in die tijd het Baselse probleem, niet alleen naar Euler maar ook naar Johann en Daniel Bernoulli, die er ook aan werkten.
Ik laat het lezen van Eulers oplossing met behulp van integralen even aan uzelf over (zie weer [3]), en ik ga direct door naar de voetnoten, want daar stond wat ik zocht: de titel van het artikel waarnaar ik op zoek was: '*Démonstration de la somme de cette suite* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ ', en ook het Eneström-nummer E63. Nu zoeken op *Nummer*, en daar stond het. Het stuk verscheen in 1743 in Deel 2, nr. 1 van het *Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord* (pp. 115-127). En inderdaad, dit deel van het *Journal littéraire* verscheen in Den Haag; de druk werd daarna in Amsterdam voortgezet, en het speelde een belangrijke rol in de wetenschappelijke communicatie van die tijd, met ook veel artikelen over religie. Ook dat is mooi van de geschiedenis van de wiskunde, je ziet nog eens wat anders.
Het Euler-archief biedt tenslotte nog de gelegenheid om de heruitgave (1907/1908), na de herontdekking van dit verloren gegane artikel van Euler, in het Frans na te lezen.

Conclusie en moraal

De conclusie is: een artikel van Euler verscheen in 1743 in Nederland, maar niet in het Nederlands.
De moraal van dit verhaal: wie in 2007 meer van Euler wil weten, heeft de bronnen via het zeer te prijzen werk van deze twee Amerikanen, Dominic Klyve en Lee Stemkoski, onder handbereik. Mits er ook een computer onder handbereik is, dat wel.
We zijn een stap dichter bij ons grote voorbeeld. 'Lees Euler, hij is de meester van ons allen.' Zo dacht Laplace er al over.

172

NUM. IV.

Ejusdem

De ſummis ſerierum reciprocarum ex poteſtatibus numerorum naturalium ortarum Diſſertatio altera:

in qua

eædem ſummationes ex fonte maxime diverſo derivantur.

§. I.

Poſtquam ante complures annos ſummas ſerierum in hac forma generali contentarum $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+$ &c. in infinitum, ſi n fuerit numerus par poſitivus, ſimulque etiam harum ſerierum, ſi n fuerit numerus impar $1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{11^n}+$ &c. in infinitum, ope quadraturæ circuli exhibuiſſem, atque oſtendiſſem, ſummam perpetuo per eandem peripheriæ circuli dignitatem, quam exponens n indicet, exprimi: argumentum hoc acutiſſimis Geometris tantopere placuit, ut id non ſolum maxime probarent, verum etiam ipſi

Noten

[1] S.B. Engelsman: *What you should know about Euler's opera omnia*. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde,* 4e serie 8(1990), nr. 1, pp. 67-79.

[2] *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 71 (1983–1984), pp. 1-11.

[3] *www.maa.org/news/howeulerdidit.html* (klik bijna onderaan op 'The Basel Problems with Integrals', March 2004).

Over de auteur

Lees het interview van Jos Tolboom met Jan van Maanen (*Euclides* 82, nr. 4, pp. 133–135).
E-mailadres: *maanen@fi.uu.nl*

’Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?’

AFLEVERING 2B: IN GESPREK MET LOEK HERMANS

[Hans Daale]

’Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?’ Hoe kijken volwassenen terug op hun vroegere wiskundelessen? Met plezier, met afgrijzen? Was het zinvol? Wat bleef ervan over, met andere woorden: welke betekenis en welke zin bleek dat wiskundeonderwijs al dan niet te hebben, later in hun leven? En wat gebruiken mensen in hun werk nog van die op school geleerde wiskunde?
In het vorige nummer van Euclides startte de redactie een korte serie interviews waarvoor deze vragen de basis vormden. In die eerste aflevering las u een weerslag van de reacties van een willekeurige groep voorbijgangers [1]. Dit keer gaat het om twee wat langere interviews. Hieronder vindt u de weerslag van een gesprek dat redacteur Hans Daale had met Loek Hermans, voorzitter van MKB-Nederland en voormalig minister van Onderwijs. Het andere interview is te vinden op pagina 206.

Werkgevers en docenten: samen praten over de positie van het vak wiskunde

Loek Hermans; achtergrond

In het kader van onze zoektocht naar de mening van de ‘gewone mens op straat’ over wiskunde leek het aardig om ook gericht iemand te bevragen die vanuit een bijzondere invalshoek iets over dit onderwerp te vertellen heeft. Nu gaan veel van de discussies op dit moment over rekenvaardigheden die bij toekomstige meesters en juffen sterk lijken terug te lopen, maar ook het werkveld begint voorzichtig te klagen over het afnemend vermogen van afgestudeerden om soepeltjes met wiskundige vaardigheden om te gaan. Een persoon die over beide aspecten een zeker licht kan laten schijnen, is Loek Hermans, oud-minister van Onderwijs en nu al enige tijd voorzitter van MKB-Nederland, de landelijke vereniging van kleine en middelgrote bedrijven.
De afspraak om ‘langs de wiskunde-meetlat’ te worden gelegd, was prettig snel gemaakt. Loek Hermans is nog steeds iemand die op basis van zijn ervaringen veel gevraagd wordt om zijn mening te geven over de meest uiteenlopende maatschappelijke ontwikkelingen. Dan steekt hij die mening niet gauw onder stoelen en banken, zeker als het gaat om zaken waarover hij zich, ook persoonlijk, zorgen maakt. Onderwijs behoort - nog steeds - daartoe.
Natuurlijk lopen we eerst de eigen wiskunde-achtergrond van Loek Hermans na, net als bij de anderen die we hebben bevraagd. ‘Als 55-jarige ben ik dus van vóór de Mammoet. Ik heb hbs-A gedaan, met wiskunde tot en met de vierde klas, om daarna Bestuurskunde te gaan studeren in Nijmegen. In die studie kreeg je te maken met Statistiek 1 en 2 en allerlei noodzakelijke vakken zoals Methoden voor wetenschappelijk onderzoek. Maar dan heb je het toch vooral over rekenen en daaraan gelieerde vaardigheden.’ De vraag is of het bezig zijn met die vakken ook nog voelt als het hanteren van wiskunde als vak. ‘In zekere zin wel, maar het gaat natuurlijk om de ondersteuning bij andere vakken zoals economie. Volgens mij draait het daarbij toch ook vooral om logica, om het logisch kunnen denken. Dat is de grondslag voor een soort manier van studeren, werken en doen. Maar dat gold en geldt eigenlijk ook voor zaken als Nederlands en de vreemde talen, in de gehele studie. Ik heb het gevoel dat er toen wel degelijk een werkbare basis werd neergelegd in mijn vooropleiding.’
Ik probeer meteen maar wat te prikkelen door te stellen dat men dit vaak ziet als een beetje nostalgie, als het verhaal van ‘toen’. Hermans ziet dat zeker niet zo: ‘De Mammoetwet heeft voor een groot deel de weerstand uit leerlingen gehaald, door de mogelijkheden om al snel te kunnen gaan voorsorteren of af te haken. Ik ben van mening dat het erom gaat te zorgen voor een breed aanbod, in ieder geval tot je achttiende. Als we kijken naar het beroepsonderwijs, waar toch twee derde van de jongeren zit, dan moeten we ons goed realiseren dat ze straks in hun beroep veelal terug moeten vallen op hetgeen ze op school aan kennis hebben opgedaan. In de horeca, in de metaal, in de houtbewerking… allemaal vakgebieden waarin ze logisch moeten kunnen nadenken, logisch moeten kunnen omgaan met zaken die ze tegenkomen en vervolgens moeten toepassen.’

Wezenlijk

Mijn tegenwerping – en ook die van anderen – is natuurlijk dat juist daar met machines, apparaten en dergelijke wordt gewerkt die het iedereen wel erg gemakkelijk maken. ‘Juist, en daarom moet zo’n jongere leren, hoe hij op voorhand kan inschatten wat de rekenmachine voor uitkomst gaat geven.’ Moet de stelling van Pythagoras dan nog wel? ‘Eigenlijk wel,

want daarbij draait het wel om het denken in relaties en verhoudingen, op zichzelf ook essentieel voor bepaalde werkzaamheden.' Mijn vraag is dan of we, juist in die eerste niveaus van het mbo, moeten blijven vasthouden aan het uitgangspunt dat wiskunde op een volwaardige wijze tot en met mbo-2 wordt gedaan. 'Ja, ik denk dat we dit mogen eisen van jongeren, voor later, om ze voldoende kansen te geven. Het is en blijft een hoofdvak, niet in alle omstandigheden, maar het moet altijd een wezenlijk onderdeel van een opleiding blijven.'

Terugblik
Natuurlijk is het onvermijdelijk om ook even in het politieke verleden van Loek Hermans te duiken. Het blijft intrigerend dat nog steeds wordt toegestaan dat jongeren door het stelsel van vmbo, mbo en havo en vwo kunnen sluipen om uiteindelijk op de pabo terecht te komen zonder periodiek met rekenen, wiskunde en gecijferdheid te zijn geconfronteerd. Dergelijke routes zijn er al jaren via het mbo, maar ook bij het havo, met C&M waarin nu nog wel wiskunde-A1 voorkomt (met alleen een schoolexamen), maar straks helemaal zónder wiskunde. Hoe kon dat in alle jaren worden toegestaan, door ons allen?
'Laat ik voorop stellen dat onderwijzers gewoon goed moeten kunnen rekenen. Zoals al gezegd, vanuit mijn eigen ervaring redenerende, is de kiem voor hetgeen we nu moeten constateren gelegd met de Mammoetwet, begin 70'er jaren, dus op het moment dat er vakkenpakketten werden ingevoerd. Leerlingen konden zaken laten vallen als ze problemen verwachtten en dat heeft zich eigenlijk alleen maar verder ontwikkeld. Het keuzegedrag is iets wat daarna, ook door mij en mijn medewerkers bij OCW, als een verbeterpunt is gezien en we hebben daarom ook een aantal zaken in gang gezet. We hebben nu als het ware herontdekt dat jongeren weer een brede kennisbasis moeten hebben. Ik zeg altijd dat als je niet weet waar je vandaan komt, je ook geen idee hebt waar je naar toegaat. Dat geldt niet alleen voor wiskunde, maar ook voor zaken als geschiedenis, als onderdeel van onze cultuur. Zo'n boekje dat laatst door een docent is geschreven, met verbazingwekkende missers en fouten in proefwerken en werkstukken, dat moet toch wel een op te pakken signaal zijn. Als een havist op het examen stelt dat het Ruhrgebied ergens bij Berlijn ligt, dan is er toch iets mis. Je hoeft ook niet exact te weten wanneer de 80-jarige oorlog was, maar de reden en de context, dat zijn aspecten die nodig zijn om te begrijpen wat er door de jaren heen heeft gespeeld. Begin daarom standaard zo lang mogelijk Nederlands, twee vreemde talen, wiskunde en geschiedenis in het rooster op te nemen, bijvoorbeeld steeds vier uren in de week. Dan kom je zeker aan een goed gevulde week, maar dat is het uiteindelijk wel waard.'

Bedrijfsleven en ervaringen
Hoe zit het met 'het bedrijfsleven' in z'n algemeenheid – heeft men daar ook een mening over het wiskundeonderwijs? Want iedereen valt nu over iedereen heen. Beter Onderwijs Nederland is een teken aan de wand. De leerlingen zelf gingen begin dit jaar de straat op. De HBO-raad en de MBO-raad zijn met elkaar in gesprek over het inbedden van funderende kennis in de doorlopende leerweg mbo-hbo, met wiskunde als een van de hete hangijzers. OCW ontwerpt regelingen die vervolgens met die partijen tot afspraken leiden. Het is echter de arbeidsmarkt die ermee aan de slag moet. Je hoeft maar bij een willekeurig bedrijf binnen te lopen om de mensen op de werkvloer veelal te horen klagen over het gebrek aan bepaalde, noodzakelijke kennis bij jongeren. Waar blijven vervolgens de werkgeversorganisaties om te formuleren welke kennis dat moet zijn en waarvoor deze van belang is? Zij zijn toch ook 'consumenten' van het onderwijs?
Loek Hermans springt daar duidelijk op in: 'We komen binnenkort met een brief, een soort manifest, over de vakinhouden in het voortgezet onderwijs. Niet over het aanleren van allerlei specifieke weetjes en zo. Het gaat om het gevoel dat rond kennis van zaken voor bepaalde beroepen speelt. Die noodzaak willen we helder maken. Want als in een bedrijf de baas bij een lustrum aangeeft dat de oprichting in 1946 was – dan moet toch ook de jongere werknemer dit moment kunnen plaatsen in die tijd… Het is een simpel voorbeeld, maar toch.'
Maar wat ziet Hermans als belangrijkste verandering bij de leerlingen, bij de jeugd van nu? 'Het is duidelijk dat je als werknemer moet kunnen meepraten over zaken die het bedrijf raken – daarvoor ben je ook aangenomen. Je kunt niet op elk



Loek Hermans

moment opstappen en wat anders gaan doen, buiten de bedrijfscultuur om. Een organisatie is wat dat betreft geen chatbox. Als je achter de computer zit te chatten, en iemand bevalt je niet en de betrokkene lijkt een mafkees, dan loop je weg of druk je op een knop en je hebt er vervolgens niets meer mee te maken. Dat kan in een werkomgeving niet, want je maakt simpelweg deel uit van die werkomgeving, met gezamenlijke verantwoordelijkheden.'

Wiskunde meenemen in beleid
Het vak wiskunde wordt dus meegenomen in het werkgeversvoorstel om iedereen weer eens te laten nadenken over hetgeen waarvoor het onderwijs is bedoeld. 'Klopt; wiskunde "omzeilen" is net zoiets als talen laten vallen omdat je ze niet leuk vindt. Je moet toch ook een zeker vermogen opbouwen om later weer allerlei zaken te kunnen en durven aanpakken. Zo zat ik bijvoorbeeld vorige week in Maastricht te praten met Duitse werkgevers en binnen korte tijd gaat het Duits spreken me weer goed af. Frans op vakantie duurt wat langer. Je moet later een en ander weer snel kunnen oppakken.'
Ik geef het voorbeeld van het Universitair Medisch Centrum Groningen dat alle instromende mbo'ers en hbo'ers standaard een rekencursus geeft, omdat zij toch wel

heel erg verantwoordelijk bezig moeten zijn met maten, gewichten en hoeveelheden. ‘Laat duidelijk zijn dat het bedrijfsleven natuurlijk in het algemeen niet zit te wachten op het afnemen van een eigen rekentoets. Maar ze gaan wel steeds vreemder aankijken tegen jongeren die niet in staat zijn om – zeg maar – hun eigen positie te bepalen in de organisatie, dus niet weten wat er allemaal rondgaat in hoeveelheden, geld en zo. Dat is geen goede situatie omdat het gevolgen kan hebben voor hun arbeidsrelatie.’

Docenten, overleg en NVvW

In het verlengde van de aandacht voor de inrichting van het onderwijs en de vormgeving van instellingen geef ik aan dat ook veel docenten het idee hebben dat ze klem komen te zitten. Ze willen wel, ook gelet op de wensen van het werkveld, maar de mogelijkheden ontbreken nogal eens. Als het werkveld nou vindt dat wiskunde en zaken als rekenvaardigheden meer aandacht moeten krijgen en men komt met een manifest, hoe dan verder? Heeft MKB-Nederland wel eens gesproken met de NVvW? ‘Nee, dat contact heeft nog niet plaatsgevonden. Het is zeker iets waarvan ik zeg dat het zou moeten kunnen. Het kan geen kwaad om van elkaar te horen hoe je tegen dit soort zaken aankijkt. Dus laten we maar gewoon een afspraak maken.’
Maar is Hermans niet bang dat er vervolgens wordt geroepen dat het bedrijfsleven weer zo nodig invloed wil uitoefenen op het onderwijs en zaken wil voorschrijven? ‘Daar gaat het ook helemaal niet om. Het gaat er om aan te geven wat wij onder basiskennis verstaan en wat belangrijk is om goed te functioneren in een baan, ook als beginner. Natuurlijk formuleren we dit vanuit onze positie gezien, als ontvangende partij. Maar het is nu eenmaal zo dat wij vinden dat vakken als Nederlands, Engels en wiskunde allemaal zaken betreffen die gewoon nodig zijn om te kunnen functioneren binnen een organisatie, en dat geluid willen we laten horen.’

Vakleerkracht rekenen?

Weer terug naar de wiskunde op zich, want daarvoor zitten we toch bij elkaar. In onze vraaggesprekken met diverse mensen over hun beleving van wiskunde kwam ook iemand aan het woord die lesgeeft op een basisschool en van zichzelf weet dat ze qua rekenen niet alles beheerst; zie het interview op pagina 206. Zij stelt voor om, net als bij gymnastiek, te gaan werken met vakleerkrachten rekenen. Gek of juist creatief? ‘Ik aarzel. Het zou iets kunnen zijn, maar toch moeten we uitgaan van een systeem in ons land waarbij men zo lang mogelijk wiskunde krijgt. En dan moet dit gewoon structureel op het vereiste niveau op de pabo worden ingebed, omdat het daar thuishoort in het pakket voor studenten. Net als de andere basisvakken.’ Kan een oud-minister dat wel roepen? ‘Waarom niet, ik doe het nu vanuit het bedrijfsleven. We willen daarover zeker signalen gaan afgeven – dat voelen we wel als een verantwoordelijkheid van onze kant.’

Motiverende docenten

Even kijkend naar de persoonlijke situatie: Goed in wiskunde geweest? Prettige docenten gehad, van invloed op de eigen beleving? ‘Ik heb niet het juiste gevoel voor wiskunde op zich, dat is mij wel duidelijk. Ik heb mede daarom ook voor hbs-A gekozen. Maar ik heb motiverende, niet uit het boek voorlezende docenten gehad. Dat is toch van belang geweest, ook voor mij, om zaken enthousiast aangereikt te krijgen en vervolgens tot je te kunnen nemen.’ En de kinderen – hoe was het bij het helpen bij het huiswerk? ‘Nou, mijn vrouw is heel erg goed in wiskunde, dus dan gaan ze toch wel wat meer die kant op…’

Competenties

Tenslotte nog iets wat ons allemaal bezighoudt, het competentiegerichte onderwijs. Loek Hermans is daar duidelijk over. ‘Het is geen kwestie van loslaten, maar van begeleiden. Niet van zomaar aan de slag laten gaan, maar eerst goed vertellen en aanleren wat nodig is om zelfstandig bezig te zijn. Kijk maar eens naar het opleiden van voetballers zoals Piet Boekhoud als voorzitter van het Rotterdamse Albeda College laatst zo treffend verwoordde: eerst trainen, vervolgens op de bank gaan zitten, warmlopen en dan pas het veld in. En ja, dan kan de trainer tijdens de wedstrijd er niet meer steeds naast gaan lopen en aanwijzingen geven.’ Ik voeg er aan toe dat we dan ook meer professionele begeleiders moeten hebben, een soort personal coaches. ‘Dit soort onderwijs vraagt natuurlijk om de juiste en geschikte mensen voor een dergelijke aanpak. En dat er meer aandacht nodig is voor begeleiding, in de klas, bij het maken van keuzes en bij projecten, dat is zeker.’ Een duidelijke oproep dus.
‘Overigens, alle begeleiding en advisering heeft z’n beperkingen. Toen ik 17 was werd mij aangeraden de handel in te gaan, mede omdat mijn docent handelsrekenen één brok dynamiek was voor de klas, voor wie je gewoon je huiswerk maakte en waarbij je probeerde van alles goed te doen – maar het heeft toch 34 jaar geduurd voordat ik daarmee in aanraking kwam.’

Noot

[1] Klaske Blom e.a.: *Als ik zeg wiskunde, wat zegt u dan?* In: *Euclides*, 82(5), maart 2007

Over de interviewer

Hans Daale is lid van de redactie van Euclides en betrokken bij ontwikkelingen binnen het hoger beroepsonderwijs.
E-mailadres: *daale-zwol@planet.nl*

Ik las en dacht…

[Klaske Blom]

In oude jaargangen van vaktijdschriften over ons wiskundeonderwijs vinden we regelmatig artikelen die in het licht van huidige onderwijsontwikkelingen opeens opmerkelijk worden. Soms omdat ze, geschreven in een totaal andere tijd, een verfrissend perspectief op onze huidige situatie bieden, soms omdat ze, ondanks hun gedateerdheid, verrassend actueel blijken te zijn, omdat ze tot nadenken stemmen, omdat…
In de rubriek 'Ik las en dacht…' neemt Klaske Blom u mee naar zo'n 'oud actueel artikel'


BIJVOEGSEL
VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT
VOOR WISKUNDE
GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN
ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT en P. WIJDENES
P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Niet creatief begaafd? Aversie? Vrijstelling!

Psychisch leed vermijden

Voor deze aflevering van 'Ik las en dacht…' koos ik een artikel van Van Dantzig uit het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan Onderwijsbelangen, 3e jaargang 1926/1927.
Het artikel is getiteld: '*Over de maatschappelijke waarde van onderwijs in wiskunde*'.
Kort door de bocht samengevat staat er: leerlingen die een aversie hebben tegen wiskunde, het later niet nodig hebben of over te weinig creatief talent beschikken, moet je geen wiskundeonderwijs laten volgen. Zo, dat is nog eens een uitspraak, vindt u niet? Uiteraard vinden we in Van Dantzigs argumentatie veel nuances, en bepleit hij ook een noodzakelijke basis van gecijferdheid, maar toch…
Wat me trof in dit artikel is de uitspraak dat wiskundeonderwijs psychisch leed en verdringingen kan veroorzaken. Natuurlijk is dit een gedateerd artikel: Van Dantzig werd geboren in de tijd dat Freud de basis legde voor de psychoanalyse, en de inhoud van de schoolwiskunde aan het begin van de twintigste eeuw is niet vergelijkbaar met het huidige curriculum, maar toch lijken zijn opvattingen me zeer de moeite waard om kennis van te nemen. Het werpt een oud nieuw licht, als van een ster op grote afstand, op een actualiteit.
Leest u eerst de fragmenten uit het artikel; ***zie pag. 214.*** Het kost, 80 jaar na dato, misschien wat moeite om de tekst met het relatief lastige taalgebruik snel te lezen en te doorgronden, maar ik denk dat zijn betoog die moeite waard is!

OVER DE MAATSCHAPPELIJKE WAARDE VAN ONDERWIJS IN WISKUNDE

D. van Dantzig

No man ever learns to do one thing by doing something else. (George Bernard Shaw)

1. In den laatsten tijd wordt dikwijls de vraag gesteld – en somtijds in ontkennenden zin beantwoord – , of het wel eenig doel heeft, de wiskunde op de middelbare scholen ook aan hen te onderwijzen, die haar in hun latere loopbaan niet rechtstreeks zullen behoeven toe te passen.
Hieruit blijkt, dat velen van hen, die ons wiskunde-onderwijs "genoten" hebben, van het belang en de wenschelijkheid dit onderwijs te ondergaan, allerminst overtuigd zijn en dat dus dit onderwijs zeker niet altijd in eene gevoelde behoefte voorziet.[1)] Dit moet als een gebrek in ons wiskunde-onderwijs worden beschouwd.
(…)

A. Wat is het eigenlijk dat wij onzen leerlingen willen medegeven, en hoe kunnen wij dit het beste doen?

3. Wanneer we "de" mogelijke waarde van wiskunde-onderwijs naar de aan het waardeeringsoordeel ten grondslag liggende gevoelens onderscheiden in "directe waarde", die berust op onmiddellijke emotioneele belevenis, en "indirecte waarde", die berust op meer verstandelijk beredeneerde verwachtingen omtrent toekomstige emoties, dan is de mogelijke indirecte waarde van onderwijs in wiskunde, daar deze vrijwel uitsluitend op "secundaire functie" berust, voor den jongeren leerling nihil, voor den ouderen leerling te verwaarlozen klein, en voor den ex-leerling (met uitzondering der weinigen, die eene der wiskunde verwante loopbaan gekozen hebben) van abstract maatschappelijken aard ("vormende waarde"), terwijl de mogelijke directe waarde voor den leerling gelegen is in de gevoelens van "kunstgenot", die hij bij de beoefening der wiskunst beleeft en voor den ex-leerling in de herinnering aan zulke gevoelens.

4. Daar primaire gevoelens van onwaarde (b.v. herinnering aan door het wiskunde-onderwijs veroorzaakt kinderleed) niet alleen het besef der indirecte waarde verdrijven ("noodzakelijk kwaad"), maar veelal de vormende waarde zelve te niet doen, doordat zij tot geheele of gedeeltelijke psychische verdringing van het aan het woord "wiskunde" gekoppelde complex, dus tot vergeten of niet-begrijpen, leiden, en daardoor het ontstaan der gewenschte psychische faculteiten verhinderen, zal

B. wiskunde-onderwijs, als het geen directe waarde heeft (doorgaans) ook geen indirecte waarde, dus in het geheel geen waarde hebben.

5. Aan de ervaring kan ook het feit worden ontleend, dat zij, die, naar het oordeel der wiskundigen, een juist inzicht in de mathesis hebben verkregen, als regel ook geen tegenzin in het wiskundig werken hebben. Deze uitspraak is een "natuurwet", die als zoodanig zeker niet altijd opgaat, zelfs niet exact geformuleerd kan worden, terwijl zij desalniettemin voldoende frequent blijkt uit te komen om haar als richtsnoer voor ons handelen betrouwbaar te kunnen achten:

C. Tegenzin tot en goed begrip van de wiskunde gaan zelden samen.

6. Hierop baseeren we den eisch (…)

D. Alle W.O. [= wiskundeonderwijs; KB] dient slechts in zoodanigen vorm gegeven te worden, dat het de liefde en de belangstelling verwerft en behoudt van hen, die het ondergaan. Waar dit, zooals bij de huidige methodiek te veelvuldig het geval is, niet bereikt wordt, is het als ondoelmatig en schadelijk voor de psyche der leerlingen te verwerpen.
Dit is een sociaal-ethische eisch, die kan worden aanvaard of verworpen, maar niet bewezen of weerlegd.
(…)

8. Daar nu 1e. sterke affecten bij jonge kinderen in het geheel niet, bij oudere leerlingen nauwelijks gewekt worden door aesthetisch apperceptieve, maar vrijwel uitsluitend door energetisch creatieve ervaringen, zoodat de kennisname en beschouwing van een nog zoo schoon mathematisch systeem zonder actieve deelname aan den opbouw daarvan bij den leerling vrijwel geen waardeering kan wekken;

terwijl 2e, het vermogen tot creatief mathematisch werken ("mathematische intuïtie") door den gemiddelden goeden leeraar niet of nauwelijks kan worden aangekweekt tengevolge van onze onbekendheid met de psychische mechanismen, waardoor de mathematische "ontdekking" tot stand komt,
en daar 3e. eene uit bijzonder, uit individueele omstandigheden ontstane, psychische constellatie van den leerling voortspruitende aversie tegen de wiskunde alle positieve waarde van het W.O. onmogelijk maakt, den leerling daarvan slechts schadelijke gevolgen (psychische conflicten, verdringingen, enz.) doet ondervinden en als regel door den leeraar niet kan worden geanalyseerd, nog minder met succes kan worden beïnvloed, moet men concludeeren:

E. Alle leerlingen, die hetzij gebrek aan creatieve "begaafdheid", hetzij een sterke aversie tegen de wiskunde hebben, dienen van het W.O. te worden vrijgesteld.

9. Eene uitzondering kan gemaakt worden voor het uiterste minimum aan wiskundige kennis, dat voor andere leervakken als technisch hulpmiddel noodig is. Dit omvat slechts de concrete kennis van enkele empirische (dus waarneembare, niet bewijsbare!) geometrische eigenschappen, en enige vaardigheid in het toepassen van enkele eenvoudige algorithmen, heeft met "begrijpen" niets te maken, en kan door een ervaren docent (althans voor zooverre het binnen het kader der gebruikelijke H.B.S.-leerstof valt) zelfs aan jonge kinderen in luttele uren geleerd worden.

Voetnoot [1)]
Deze en verschillende der volgende opmerkingen zullen waarschijnlijk niet uitsluitend voor de wiskunde, doch evenzeer voor sommige andere onderwijsvakken gelden. Hoogstens zijn ze wellicht bij de wiskunde van meer belang, doordat het al of niet "slagen" van het onderwijs bij ons in hoogere mate dan bij andere leervakken van de in het bijzonder emotioneele psychische gesteldheid van den leerling afhankelijk is. Alle dergelijke oordeelen zijn hier echter uitsluitend voor de mathesis uitgesproken, daar ik buiten dit gebied geenerlei competentie heb. Mogen de andere vakleeraren zelve onderzoeken, in hoeverre bovenstaande beschouwingen iets voor hun eigen gebied impliceeren.

Van Dantzig

David van Dantzig werd geboren in 1900, overleed in 1958, was een zeer vooraanstaand wiskundige en statisticus met internationale bekendheid en eervolle onderscheidingen; hij was medeoprichter van het Mathematisch Centrum te Amsterdam. Als student mislukte hij in zijn studie scheikunde en omdat er geen geld meer was om nog een tweede studie te beginnen, heeft hij zijn belangstelling voor wiskunde uitgeleefd door in een razend tempo de akten KI, KV en KII te halen in het begin van de twintiger jaren, om vervolgens toch nog een wetenschappelijke carrière te beginnen. Hij schijnt een soms onnavolgbaar docent en hoogleraar geweest te zijn, die zich naast zijn wiskundige activiteiten ook bezig hield met de maatschappelijke waarde van onderwijs in wiskunde. Hij vond het meeste algemeen vormende onderwijs in de wiskunde zinloos omdat het meestal om een voor leerlingen betekenisloos formalisme ging. Toen hij zich eind jaren '30 zelf meer richtte op toepassingen van de wiskunde, ging hij ook het belang van algemeen vor-mend wiskundeonderwijs herwaarderen. [1, 2]
Dit artikel is uit het begin van zijn carrière; andere publicaties van hem ken ik niet, maar deze vond ik fascinerend.
Wat vindt u van de conclusie dat leerlingen die geen creatieve begaafdheid hebben of een aversie tegen wiskunde, vrijgesteld moeten worden van wiskundeonderwijs? Misschien nog boeiender is zijn argumentatie om tot deze conclusie te komen: aan alle kanten moeten we voorkomen dat leerlingen tegenzin krijgen in wiskunde, omdat tegenzin een goed begrip in de weg staat.

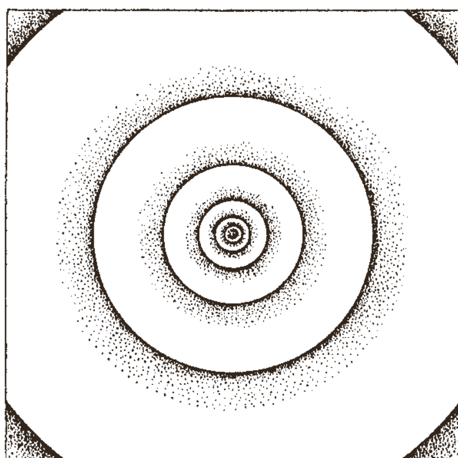
Ervaringen tijdens de Open Dagen

Het artikel riep herinneringen op aan onze laatste open dagen op school. Ik neem aan dat u allen uit eigen ervaring dit circus kent. We zetten, maar liefst drie dagdelen, onze schoolpoorten wijd open in de hoop dat er zoveel mogelijk kinderen tot ons zullen komen. In de meest cynische variant lokken wij kinderen met key-cords, anti-stress-balletjes, gratis koekjes en chocola, toneelvoorstellingen, leslokalen met uitnodigende experimenten op elk vakgebied. In de vriendelijke versie profileren wij ons als school met onze sterke 'eigenheden' zodat kinderen uit Amersfoort een indruk krijgen van de school die het beste bij ze past.
Voor mij zijn deze open dagen een bezoeking. Ik krijg meestal een taak bij de ontvangst, vermoedelijk omdat ik zo vriendelijk kan glimlachen. En ondanks mijn grondige aversie tegen dit commerciële bedrieglijke 'gedoe' waarin ouders en kinderen een net-niet-nep, maar toch wel te-rooskleurig-beeld van onze school krijgen, vind ik het tot mijn eigen stomme verbazing toch weer leuk om gasten te ontvangen in mijn school, wil ik graag dat mijn school een goede indruk maakt en doe ik daarvoor mijn best. Ik sloof me niet eens uit, het gaat vanzelf… En gelukkig hoefde ik niet alleen maar te glimlachen: ik gaf ook lesjes aan de verkenners uit groep 8. Vijf keer achtereen een enthousiaste en verwachtingsvolle meute voor mijn neus: kinderen op het puntje van hun stoel die helemaal vergeten dat ze verlegen zijn. Ze zwiepen hun vingers in de lucht om maar gezien te worden en hun ideeën te mogen vertellen. Grandioos. Ze laten zich meeslepen door de magie van het 'raad-mijn-verjaardagsdatum'-spel: ***zie pag. 216***. Rekenen dat het een lieve lust is, en nog eens, en nog een keer proberen.
In een tweede activiteit laat ik ze 'ruiken aan' het werken in een assenstelsel. Ze zetten, met de tongpunt tussen hun lippen, met behulp van coördinaten punten uit in een assenstelsel, gaan inzien hoe het werkt in het derde en vierde kwadrant, zonder ooit al met negatieve getallen gewerkt te hebben! Ontdekkingen doen, op zoek gaan, willen weten, plezier en fanatisme, het kwam allemaal langs in die korte 25 minuten. Wat een genot en wat een plezier om met deze enthousiastelingen te werken; binnen de kortste keren laten ze zich verleiden door de wiskunde. Het is lang geleden dat ik een brugklas had, maar dat gaat veranderen!

En de ouders? Sommigen aarzelen of ze met hun kind mee naar binnen zullen komen, want…: *van mij heeft ie het niet, hoor!, het was niet mijn favoriete vak, ik begin al te rillen als ik een wiskundelokaal zie!*, … Soms is de aversie gekoketteer, soms bloedserieus en diep geworteld. Maar als ze dan binnen zijn…, ik wil niet beweren dat ze allemáál 'om gaan', maar toch wel velen. Ook de ouders laten zich meeslepen door de magie. Ook zij willen weten en een enkeling neemt zelfs mijn uitdaging 'Kunt u ook aantonen waarom het verjaardagsraadsel altijd werkt?' aan, door de variabelen en haakjes van vroeger uit de kast te halen. Zomaar, vrijwillig.

Enthousiasme, liefde en belangstelling

Waar komt dit enthousiasme vandaan? En belangrijker, hoe komt het dat we het enthousiasme er zo snel weer uit weten te krijgen? Voor brugklassers is wiskunde nog hun favoriete vak, zo blijkt uit onderzoek. Maar binnen de kortste keren moeten we deze eerste plaats afstaan en verdwijnen we naar de achterhoede. Hoe is het mogelijk? Om met de woorden van Van Dantzig te spreken: we zijn niet in staat ons wiskundeonderwijs zo vorm te geven dat het de liefde en de belangstelling verwerft en behoudt van hen die het ondergaan. En volgens hem zouden we het daarmee als ondoelmatig en schadelijk voor de psyche


figuur 1

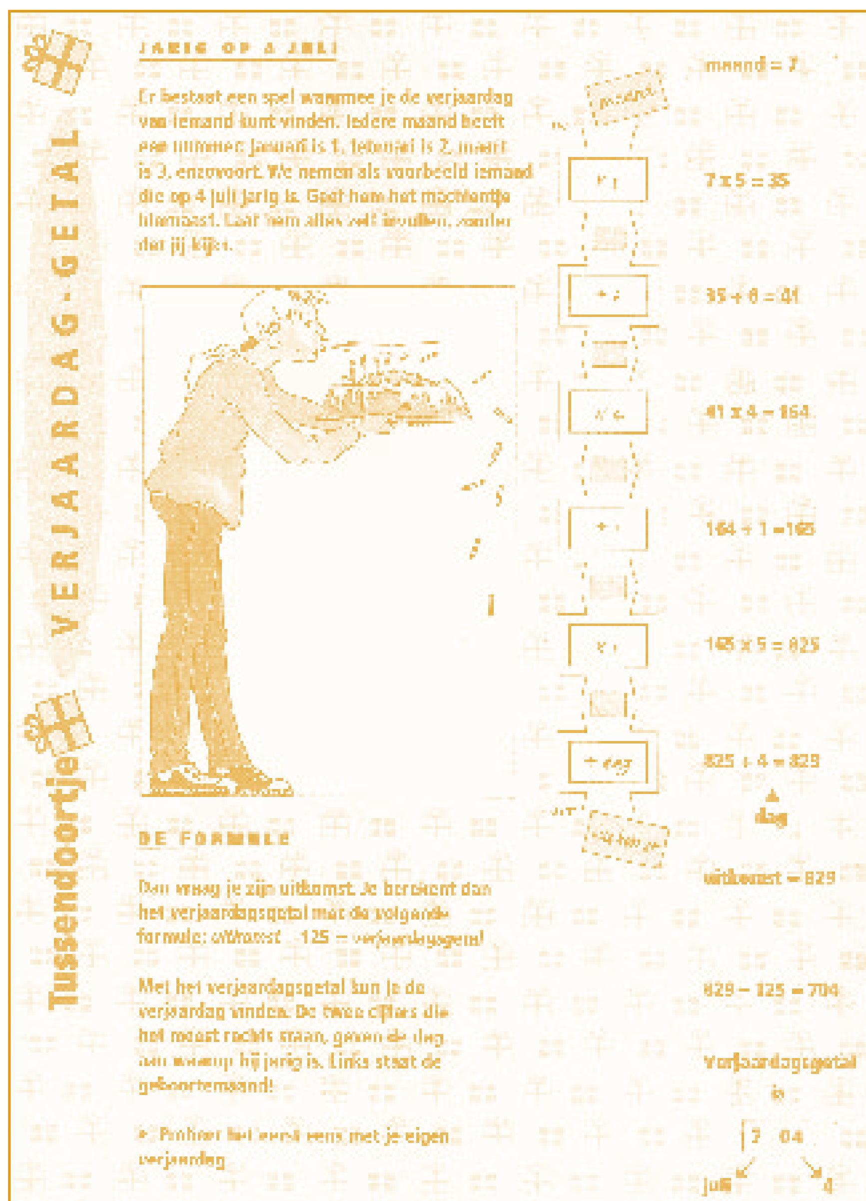
Wiskunde kan de gevaarlijkste hartstocht zijn; je krijgt er honger naar waarheid van.

Bernard Shaw

van de leerlingen moeten verwerpen. Hij beschrijft de situatie van 80 jaar geleden; ik vrees dat het nog akelig actueel is. Het is nogal wat. Dat we het enthousiasme van onze leerlingen verliezen, is één ding, maar dat we het onszelf moeten aanrekenen dat we ze daarmee schade berokkenen, vind ik een graadje erger.

Toch lijkt me veel waars te zitten in de opvatting van Van Dantzig, gezien de uitspraken die ik ouders op open dagen en onbekenden in de kroeg ontlok, als ze weten dat ik wiskundedocente ben. Wat een frustraties, wat een leed. Ik maak er geen woorden aan vuil, u herkent het vast. Ik herinner me dat een van mijn didactiekdocenten pleitte voor het meenemen van 'een doos met onbekende inhoud' voor het begin van de les: iets concreets waarmee je spanning en verwachting kunt creëren, de aandacht vangen, zorgen dat leerlingen gemotiveerd zijn om te leren, om te willen leren. Op ontdekkingstocht gaan en de liefde voor avontuur van het jonge kind behouden! Ik wil wel, maar ik kan toch niet elke les weer 'een boeiende doos' meebrengen…? Ook nog in havo-5, vmbo-T-4? Soms is het leven niet leuk, en moet er gewoon iets gebeuren of je nou wilt of niet. Mijn wil hing regelmatig aan de kapstok vroeger, en met waarom/daarom ben ik toch gelukkig groot geworden. En bovendien, ik heb nog wel méér te doen dan elke dag na te denken over zes dozen voor zes verschillende lesuren…
Allemaal waar, maar het ontslaat me niet van de noodzaak om te investeren in mijn lessen, om ervoor te zorgen dat leerlingen positieve emoties ervaren door wiskunde, om de 'directe waarde' van mijn lessen te vergroten. Van Dantzig en de toekomstige brugklassers, bedankt weer voor de inspiratie!

En niet verder vertellen, maar ik ga het proberen met alle leerlingen, ook de creatief minder begaafden, want je kunt toch op zijn minst proberen om aversie te voorkomen?



figuur 2

Literatuur

[1] Gerard Alberts: *David van Dantzig, wiskundig omnivoor*. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Vijfde serie 1-3, sept. 2000.

[2] Teun Koetsier: *Vlak David niet uit*. Uit de rubriek '*Nieuws*' in: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Vijfde serie 1-4, dec. 2000.

Verantwoording illustraties

Figuur 1 – Ir. A.E. Bosman: *Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde*. Breda: N.V. Uitgeversmaatschappij Parcival (1957).
Figuur 2 – J. Dijkstra e.a.: *Moderne wiskunde*, deel 1a havo vwo (7e editie). Groningen: Wolters-Noordhoff bv (1998).

Over de auteur

Klaske Blom is redacteur van Euclides en wiskundedocent in Amersfoort aan het Meridiaan College, vestiging 't Hooghe Landt. Haar wiskundestudie rondde ze in 1998 af met een doctoraalscriptie over de middelbaaronderwijsakten KI en KV.
E-mailadres: *kablom@tiscali.nl*

Een vernieuwd statistiekprogramma

DEEL 2: DATA-ANALYSE, EEN MOGELIJKE OPZET

[Anne van Streun, Carel van de Giessen]

Oriëntatie

In het vorige nummer van *Euclides*[1] hebben wij weergegeven hoe het gebruik van de statistiek in de sociale, medische en economische wetenschappen en de beschikbaarheid van computers aanleiding is om ons te bezinnen op een vernieuwing van het statistiekprogramma voor het voortgezet onderwijs. Voorbeelden uit de literatuur zetten ons op het spoor van een mogelijke opbouw van het statistiekprogramma in havo-vwo met behulp van data-analyse. In dit artikel werken we dat met voorbeelden uit leerboeken verder uit.

Opbouw van enkele leerboeken waarin data centraal staan

Het bekende standaardwerk *Statistics* van Freedman c.s. kende al voor het computertijdperk was doorgebroken (1e druk 1978; 3e druk 1998) een duidelijke oriëntatie op de bestudering van echte data en kenmerken van verdelingen. De eerste 220 bladzijden gaan over het ontwerpen van experimenten en beschrijvende statistiek. Onder dat laatste vallen niet alleen de grafische representaties en begrippen als gemiddelde en standaarddeviatie, maar ook de normale benadering voor een dataverzameling en correlatie en regressie. Daarna komt de kansrekening met de binomiaalformule, verwachtingswaarde en normale benadering van een kansverdeling (80 bladzijden). Ruim 70 bladzijden gaan over de ins en outs van het trekken van steekproeven met betrouwbaarheidsintervallen. De laatste 100 bladzijden gaan dan nog over het toetsen van significantie, met onder andere de Chi-kwadraat test. Ook in dit gedeelte wordt steeds ingegaan op de vraag hoe relevant het berekende resultaat is voor de conclusies ten aanzien van de samenstelling van de populatie waaruit de steekproef getrokken is. Een opvallend verschil met het huidige curriculum in havo-vwo is wel de ruime aandacht die wordt gegeven aan de beschrijvende statistiek, de kenmerken van verdelingen van echte data, waarna pas de kansrekening aan de orde komt, voor zover nodig om de theorie onder het trekken van conclusies uit steekproeven te onderbouwen.

Om een indruk te geven van een mogelijke opzet van statistiek en kansrekening gericht op het gebruik van de statistiek bij het analyseren van data hebben we gezocht naar boeken met de volgende uitgangspunten:

- *Nadenken over data leer je door met data te werken.*
- *Inzicht in realistische problemen krijg je door nadruk te leggen op het gebruiken van statistische concepten en niet op berekeningen.*
- *Vragen en data vormen de basis voor het leren van statistiek. Grafieken en getallen zijn geen doelen maar middelen om te begrijpen.*

Bij recent verschenen boeken hoort steeds een cd-rom met datasets die in het boek gebruikt worden. In *Explorative Datenanalyse; Statistik aktiv lernen* (Vogel, 2003) staan veel realistische contexten en case-studies. Vanuit een vraagstelling komt de leerling tot het leren van statistiek waarbij niet de techniek maar het zinvol gebruik het middelpunt vormt.

Het rijk geïllustreerde Amerikaanse boek *Statistics: Informed Decisions Using Data* (Sullivan 2004) heeft als motto: 'The only way that students will learn statistics is by doing statistics.' Daarvoor bevat het zeer veel materiaal. Een aantal 'oudere' boeken uit de jaren '90 is van de hand van David Moore, een grote activator van het leren van statistiek door middel van statistisch redeneren en data-analyse. Bekend is onder meer het in het Nederlands vertaalde boek *Statistiek in de praktijk* (Moore 1997) en *Statistics: Concepts and Controversies* (Moore 1996), dat op een undergraduate college publiek is gericht. De doelgroep voor de meeste boeken zijn studenten hbo en/of universiteit. De globale lijn in deze leerboeken, afgezien van details, is hetzelfde. Eerst het produceren en bekijken van data, aansluitend het organiseren en beschrijven van data. Vervolgens is er aandacht voor de stochastiek die de theoretische basis moet vormen voor het trekken van conclusies uit data. In dat laatste gaan de boeken veel verder dan voor het vwo gebruikelijk en gewenst is. Alle boeken gaan uit van het gebruik van ict bij het hanteren van de datasets.

Schets van een globale opzet voor Statistiek

De navolgende schets hebben we globaal gehouden. Het wil een overzicht bieden en een indruk geven van een mogelijke volgorde zonder in details te treden. De inhoud zal moeten voorbereiden op vervolgstudies waar statistiek een rol in speelt, maar ook geschikt moeten zijn voor die leerlingen die niet verder studeren.

Net als in de genoemde leerboeken krijgt de kansrekening (met bijvoorbeeld de expliciete aandacht voor de binomiale verdeling) in deze opbouw een minder zelfstandige plaats, en staat deze vooral in dienst van de statistiek. Het is voorstelbaar dat bijvoorbeeld in de havo de expliciete kansrekening niet meer als afzonderlijk vakgebied aan de orde komt als daar het trekken van conclusies uit steekproeven met betrouwbaarheidsintervallen niet in de eindtermen wordt opgenomen.

De indeling die in de hiervoor besproken boeken voorkomt, lijkt een heel natuurlijke. Deze indeling is ons uitgangspunt voor de mogelijke opbouw van de statistiek. Achtereenvolgens komen de volgende subdomeinen aan bod:

1 Data bekijken
2 Data beschrijven
3 Kans en toeval
4 Conclusies uit data

Doel is het leren van statistische concepten, nadenken over data, en inzichtelijk gebruik van statistiek. Door de hele lijn heen gebruiken leerlingen realistische datasets met inzet van ict. Regelmatig uitvoeren van een klein onderzoek om de geleerde concepten in te zetten bevordert de betrokkenheid van de leerlingen bij het onderwerp.
We geven steeds een korte karakterschets van de onderwerpen die in een subdomein aan bod (kunnen) komen en sluiten af met het noemen van enkele aspecten die in de leerstof aandacht dienen te krijgen.
In de volgende paragraaf geven we enkele voorbeelden van het verkrijgen van geschikte datasets en het gebruik ervan bij het leren van statistiek.

1 DATA BEKIJKEN

Bij het bekijken van data ligt de nadruk in eerste instantie meer op het kwalitatieve aspect van datasets dan het kwantitatieve. Bij een overvloed aan data wordt de noodzaak van overzicht en begrippen als gemiddelde, variatie en betrouwbaarheid duidelijk.
Dankzij ict kunnen gevarieerde vormen van visualisatie de statistische concepten niet alleen helder maar ook interessant maken en de begripsvorming ondersteunen.
Leerlingen die aan de tweede fase beginnen hebben in de onderbouw al kennis gemaakt met enkele elementaire begrippen uit statistiek en kansrekening.

representaties

Bij het kijken naar bestaande representaties in de vorm van grafieken, diagrammen, puntenwolken en tabellen is al veel te ontdekken over data en hoe ze verwerkt kunnen worden. Naar voren komen verschillende manieren hoe data samengevat en gerelateerd kunnen worden, en de kijkers misleid kunnen worden.
Aspecten bij dit onderwerp: frequentieverdelingen, spreiding, vergelijken, kritisch kijken, meetschalen, typen variabelen.

produceren van data

Er zijn veel bestaande datasets op educatieve sites te vinden. Daarnaast zijn metingen, experimenten, simulaties en enquêtes manieren om zelf datasets te maken. Uit meervoudige data die in records zijn verzameld kunnen weer nieuwe data gegenereerd worden door middel van bewerkingen als simpel omrekenen, combineren, selecteren en opsplitsen.
Het produceren van herhaalde steekproeven uit eenzelfde populatie met behulp van de computer kan een goede eerste indruk geven van variatie en betrouwbaarheid.
Aspecten bij dit onderwerp: typen variabelen, labeling, steekproef, populatie, variabiliteit, randomgetallen.

2 DATA BESCHRIJVEN

Datasets bestaan in principe uit ongeordende data. Ze dienen georganiseerd en samengevat te worden. Die samenvatting is de basis om vergelijkingen te kunnen maken en interpretaties te doen.

één variabele

Het organiseren in klassen, tabellen, grafieken, diagrammen en het samenvatten in centrummaten kan snel plaatsvinden dankzij ict, zodat aandacht geschonken kan worden aan de keuze en de kwaliteit van deze statistische middelen.
Aspecten bij dit onderwerp: verdelingen, dichtheidsverdelingen, normale verdeling, absoluut/relatief, centrummaten, spreiding, standaardafwijking, vuistregels, uitbijters.

twee variabelen

De puntenwolk is een belangrijk grafisch middel om een (statistische) relatie tussen twee variabelen in beeld te brengen.
Correlatie en regressie is een wezenlijk statistisch concept om een relatie tussen variabelen te beschrijven.
Aspecten bij dit onderwerp: kruistabel, regressielijn, lineaire (exponentiële) regressie, residu, correlatiecoëfficiënt, oorzaak en gevolg, voorspellen, trend, kleinste-kwadratenmethode.

3 KANS en TOEVAL

Significante conclusies trekken uit data kan slechts op grond van een kanstheoretisch kader. Stochasten (kansvariabelen), zowel discreet als continu, en kansmodellen zijn daarbij uitgangspunt.
Ict kan ook hier een belangrijke rol spelen door het visualiseren van kansprocessen. Simulatie van toevalsprocessen geeft meer inzicht en reikt verder dan een statistische formule.

kansrekening

De noodzakelijke basiskennis van de kansrekening wijkt niet af van wat gebruikelijk is. Wel zal de functie die het voor de statistiek heeft uitgangspunt zijn. Dezelfde begrippen als bij het samenvatten van datasets komen aan de orde, maar nu vanuit een ander perspectief, zoals bijvoorbeeld gemiddelde, variantie en verwachtingswaarde. Van belang is het gedrag van variabelen in aselecte steekproeven in vergelijking met die in gerandomiseerde experimenten.
Aspecten bij dit onderwerp: basis kansregels, kansmodellen, gemiddelde, variantie, verwachtingswaarde, afhankelijkheid, voorwaardelijke kansen, a-priori en a-posteriori, randomgetallen.

kansverdelingen

De bij datasets gebruikelijke frequentieverdelingen met hun kengetallen hebben een theoretische tegenhanger in kansverdelingen met hun parameters. De kansrekening is het middel om exacte verdelingen te bepalen in plaats van door simulatie verkregen resultaten.
Aspecten bij dit onderwerp: verdelingen (binomiaal, normaal, Poisson, …), dichtheid, wet van de grote aantallen, parameters van verdelingen, continu en discreet.

4 CONCLUSIES uit DATA

Op grond van data zullen uitspraken gedaan worden om antwoord op een vraagstelling te geven.
De beperktheid van data uit steekproeven is de oorzaak dat een schatting of conclusie onbetrouwbaar is. De kansrekening en statistische technieken bieden middelen om een conclusie over een populatie of proces met een zekere mate van vertrouwen te kunnen doen. Gezond verstand en intelligent nadenken zijn minstens zo belangrijk als de gehanteerde concepten zelf.

betrouwbaarheidsintervallen

Het doel van betrouwbaarheidsintervallen is om de waarden van een populatieparameter te schatten. Het gaat in principe om de redenering die achter dit concept schuil gaat, veel meer dan om de techniek. Een computer kan het rekenwerk doen, de uitspraak moet op basis van inzicht tot stand komen.
Aspecten bij dit onderwerp: foutenmarge, betrouwbaarheidsniveau, steekproefgrootte, fractie, onderscheidend vermogen.

significantietoetsen

Het doel van significantietoetsen is het beoordelen van de data pro of contra een bewering over een populatie. Ook voor dit concept geldt wat hierboven over betrouw-

Nr	kanaal	aantal schepen	tonnage
1	Winschoterdiep	34980	2044921
2	Hoendiep	26887	1600846
3	Eemskanaal	7318	859202
4	Reitdiep	6207	490760
5	Nrd-Willemskanaal	7004	396230
6	Damsterdiep	4396	176052
7	Boterdiep	1514	85140

figuur 1 Tabel met gegevens

baarheidsintervallen is gezegd.
Aspecten bij dit onderwerp: nul- en alternatieve hypothese, significantie, overschrijding, kritiek gebied, toetsingsgrootheid, gebruik en misbruik.

Datasets vinden en maken

Veel data zijn te vinden in media en op internet; meestal zijn dat verwerkte en geen ruwe data. Ruwe data zijn niet anders dan een verzameling getallen die betrekking hebben op één of op meerdere variabelen. In het laatste geval zijn de data verzameld in zogenaamde records. Voor data-analyse bestaat de basis aanvankelijk uit ruwe data. Verwerkte data, in de vorm van een frequentietabel, zijn echter goed te gebruiken en er valt van bijvoorbeeld een glossy meerdimensionale grafiek veel te leren over goede of foutieve representaties.Er zijn diverse sites waarvan datasets zijn te downloaden of via copy/paste binnen te halen.
Ons eigen CBS heeft een site, *www.cbs.nl*, met gigantisch veel materiaal van bewerkte tot ruwe data die gemakkelijk zijn te downloaden. De databank van de Verenigde Naties, *http://unstats.un.org/unsd/databases.htm*, stelt veel data via internet beschikbaar, waaronder een project 'InfoNation' voor scholieren.
Zeer informatief is een gratis website met demografische data, de International Data Base van het US Census Bureau, *www.census.gov/ipc/www/idbnew.html.* De databank bevat demografische en sociaal-economische data van ruim 200 landen en regio's in de wereld. Beide sites zijn een geschikte bron voor internationaal vergelijkingsmateriaal voor bijvoorbeeld leerlingprojecten.
DASL (Data and Story Library) is een prachtige on-line bibliotheek met datafiles met achtergrondinformatie bij elke set. De site, *http://lib.stat.cmu.edu/DASL*, is speciaal bedoeld voor het onderwijs in de statistiek. Het aanbod, onderverdeeld in zogenaamde topics, is zeer gevarieerd met 'real world' voorbeelden die interessant voor leerlingen zijn. De datasets kunnen uitgezocht worden bij een toepassingsgebied van de statistiek of statistische techniek.
Bij het in Nederland gebruikte educatieve programma VU-Statistiek worden datasets meegeleverd waaronder de bekende Nationale Doorsnee met meer dan 50 000 records.
Naast de kant en klare datasets is het voor leerlingen interessant en wenselijk dat ze zelf data verzamelen. Onze gedachten gaan dan niet direct uit naar enquêtes waar familie en woonbuurt mee lastig gevallen worden en waarvan de waarde vaak discutabel is - waarmee niet gezegd is dat een enquête naar aanleiding van een tevoren opgestelde statistische vraagstelling niet waardevol zou zijn.
Er zijn diverse mogelijkheden om data te genereren met behulp van simulatiesoftware. Het genoemde programma VU-Statistiek heeft verschillende simulaties die data produceren. De simulatie *'Reactiesnelheid'* maakt het mogelijk dat meerdere leerlingen aan een vergelijkende reactietest meedoen, bijvoorbeeld in een klein onderzoek. De meetdata kunnen direct worden geanalyseerd of in een dataset worden opgeslagen. De simulatietool *'Steekproeven'* geeft de mogelijkheid met steekproeven te experimenteren. Ook meetgegevens die leerlingen uit experimenten bij andere vakken verkrijgen, kunnen als dataset gebruikt worden bij wiskunde. Een prachtige invalshoek voor het bevorderen van de alom gewenste samenhang tussen wiskunde en andere vakken.

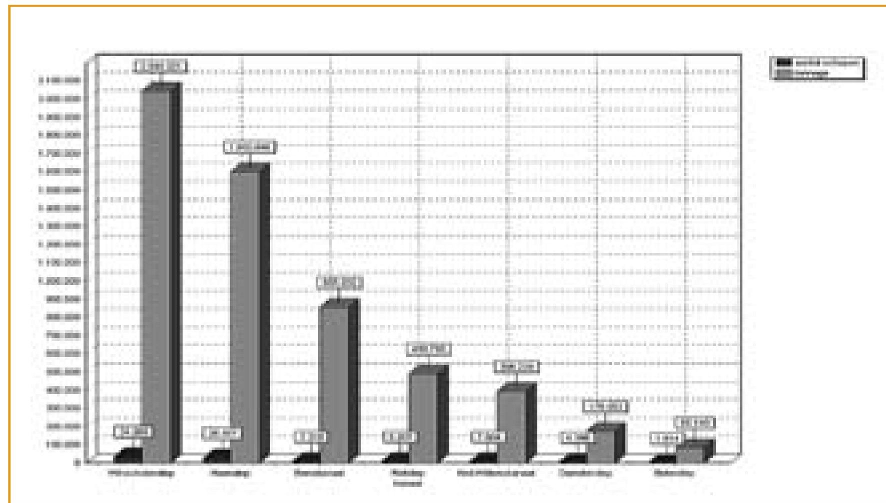
Voorbeelden van het gebruik van datasets

Aan de basis van een dataset zal meestal een statistische vraagstelling liggen. Interessant zijn dan vaak vragen die gaan over het vergelijken van twee groepen of het verband tussen twee variabelen. Vaak zijn datasets geschikt om meerdere statistische concepten te bestuderen en statistische methoden op verschillend niveau te hanteren.

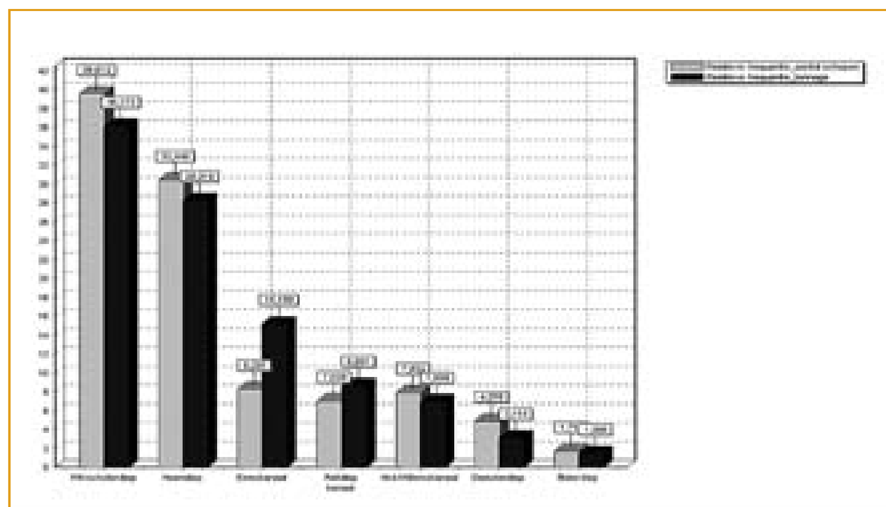
Voorbeeld 1 - Waterwegen in Groningen
Een eenvoudige set uit het begin van de vorige eeuw, toen verkeer te water nog van belang was. De dataset is in feite niets anders dan een frequentietabel, bestaande uit Groningse waterwegen, het aantal schepen en de totale tonnage die door elke waterweg is verplaatst.
Een vraagstelling zou kunnen zijn: welk van deze kanalen was toentertijd het meest belangrijk. Bij deze vraag hoort allereerst een interpretatie van de vraag, dan de keuze van een statistisch middel en tot slot de realisatie ervan. Met de computer is dat snel uitgevoerd. Elk van de ***figuren 1, 2, 3 en 4*** kan gebruikt worden.
Het onderscheiden van relatief en absoluut geeft al een verschillend perspectief om het belang van de waterwegen te beoordelen. Maar het uit de data berekende tonnage per schip laat de aparte plaats van één waterweg zien.

Voorbeeld 2 - Opvarenden van de Titanic
De ramp met de Titanic is bij leerlingen vooral bekend door de film met Leonardo di Caprio. Deze set heeft de variabelen *naam, klasse, leeftijd, sexe, overleving*.
Zie de figuren 5, 6 en 7. De historisch-sociale context komt in de dataset tot uitdrukking. Interessante verbanden zijn te leggen tussen *klasse* en *leeftijd*. Absoluut is het aantal omgekomen passagiers het hoogst in de derde klasse. Dat verbaast niet. De hypothese dat in klasse 3 meer mensen dan in andere klassen zijn omgekomen, blijkt echter genuanceerd te moeten worden. Gezien het historisch kader van deze dataset kunnen de met statistische middelen verkregen resultaten aanleiding zijn tot het stellen van vragen die slechts met kennis van de geschiedenis zijn te beantwoorden.

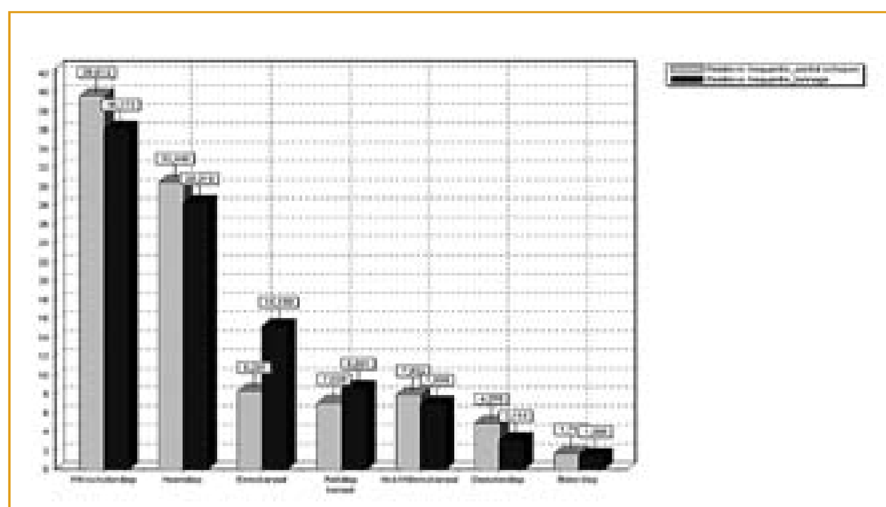
Voorbeeld 3 - Birthday dataset Amerika
Tijdseries van maanden, dagen en geboorten



figuur 2 Staafdiagram, absolute waarden



figuur 3 Staafdiagram, relatieve waarden



figuur 4 Staafdiagram, tonnage per schip

geven een ander beeld dan in Nederland, maar eenzelfde als in Zweden. Wat kan de reden daarvan zijn? Op onderstaande site is een interessante powerpoint te vinden die laat zien wat een eenvoudige dataset kan bieden.
- *www.math.utk.edu/~rdavis/Math507/Lec07%20LOOKING%20AT%20DATA.ppt*

Voorbeeld 4 - Een experiment
De hypothese '*jongens reageren sneller dan meisjes*' is uitgangspunt voor een statistisch onderzoek.
Via de computer doen jongens en meisjes mee aan een reactietest. De data worden opgeslagen in een bestand. Een eerste beeld wordt geleverd door een histogram waarin de data naar sexe zijn opgesplitst in twee groepen. Een indruk van de spreiding wordt verkregen door boxplots te vergelijken. Als de leerfase in een meer gevorderd stadium is kunnen andere statistische methoden worden ingezet. Een indruk van de mate van verschil in effect tussen beide groepen kan berekend worden door voor elke groep de gemiddelde reactietijd te delen door de gemiddelde standaardafwijking. Tot slot kan een hypothesetoets worden opgesteld en uitgevoerd.

Noot
[1] Zie *Euclides* 82(5), maart 2007, pp. 176-179.

Verwijzingen naar projecten
- Engeland: Nuffield project 'Making sense of data'; Onderwijsmateriaal Open University; zie 'Developing Thinking in Statistics' van de hand van Alan Graham.
- Schotland: STEPS-project (STatistics Education through Problem Solving).
- Duitsland: MEDASS-project (Materialien zur Explorativen Datenanalyse und Statistik in der Schule; 1994).

Websites
- Site van Rolf Biehler (hoogleraar didactiek Stochastik Universität Kassel, een deskundige op dit gebied) met veel links overzichtelijk gerubriceerd: *www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/biehler/StatistikOnline/*
- *www.learn-line.nrw.de/nav/sekundarstufen/mathematik/*
- *www.learn-line.nrw.de/angebote/eda/* (Statistik und Explorative Daten Analyse)

- STEPS project (University of Glasgow e.a.): *www.stats.gla.ac.uk/steps/about_steps.html*
- FI: WisWeb, met name minitools: *www.fi.uu.nl/wisweb/*
- David Moore: *www.stat.purdue.edu/~dsmoore/article.html*

Literatuur

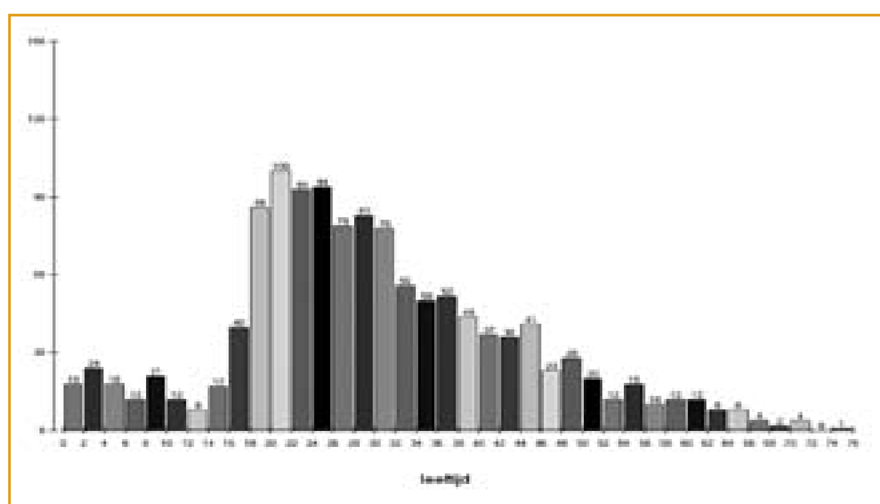
- A. Bakker (2004): *Design research in statistics education: on symbolizing and computer tools.* Utrecht: CD-ß Press (proefschrift).
- A. Bakker, K.P.E. Gravemeijer (2002): *Leren redeneren over statistische verdelingen; een ontwikkelingsonderzoek.* In: Tijdschrift voor Didactiek der ß-Wetenschappen, 19(1-2), pp. 21-39.
- D. Freedman, R. Pisani, R. Purves (2006): *Statistics.* New York: Norton & Company Inc.
- D.S. Moore (1996): *Statistics: Concepts and Controversies* (4e ed.). New York: W.H. Freeman and Company.
- D.S. Moore, G.P. McCabe (1997): *Statistiek in de praktijk.* Schoonhoven: Academic Service.
- M. Sullivan (2004): *Statistics: Informed decisions Using Data.* New Yersey: Pearson Education, Inc.
- D. Vogel G. Wintermantel (2003): *Explorative Datenanalyse; Statistik aktiv lernen.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Over de auteurs

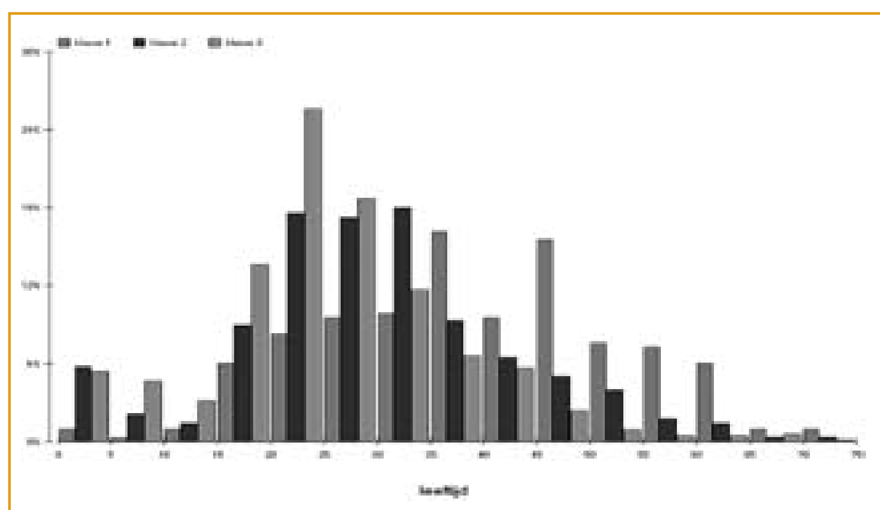
Carel van de Giessen en Anne van Streun zijn leden van cTWO en van de programmacommissie die de eindtermen voor wiskunde A en C gaat voorstellen.
Carel van de Giessen is wiskundeleraar vanaf 1969 en sinds januari 2006 gepensioneerd. Hij is auteur van de methode *Moderne wiskunde* en houdt zich momenteel bezig met zinvolle toepassingen van ict in het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *carelvdg@planet.nl*
Anne van Streun is wiskundeleraar sinds 1964, wiskundedidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen sinds 1974, hoogleraar didactiek bètawetenschappen sinds 2000 en sinds mei 2006 gepensioneerd.
E-mailadres: *avstreun@euronet.nl*

nr	passagierslijst	klasse	leeftijd	geslacht	overleving
185	Parkes, Mr Francis (Frank)	2	18	man	omgekomen
186	Rogers, Mr Harry	2	18	man	omgekomen
187	Silven, Miss Lyyli	2	18	vrouw	gered
188	Swane, Mr George	2	18	man	omgekomen
189	Abraham, Mrs Joseph (Sophie Easu)	3	18	vrouw	gered
190	Aks, Mrs Sam (Leah Rosen)	3	18	vrouw	gered
191	Arnold, Mrs Josef (Josephine Frank)	3	18	vrouw	omgekomen
192	Badman, Miss Emily Louisa	3	18	vrouw	gered
193	Barbara, Miss Saude	3	18	vrouw	omgekomen
194	Bjorklund, Ernst Herbert	3	18	man	omgekomen
195	Bradley, Miss Bridget Delia	3	18	vrouw	gered
196	Burns, Miss Mary Delia	3	18	vrouw	omgekomen

figuur 5 Deel van de passagierslijst



figuur 6 Typische scheve verdeling van de leeftijden



figuur 7 Verdeling van (sociale) klassen naar leeftijd

[Rob Bosch]

De Alabama Paradox

Quotum

Bij een verkiezing geven de kiezers in het stemhokje op de een of andere wijze hun politieke voorkeur aan. Nadat de stemlokalen zijn gesloten en de stemmen zijn verwerkt, moet de uitslag verwerkt worden tot de samenstelling van een parlement, gemeenteraad of een ander vertegenwoordigend lichaam. In sommige landen zoals Groot-Brittannië is de vertaling van de verkiezingsuitslag naar de samenstelling van het Lagerhuis geen probleem. In ieder district worden de stemmen geteld en degene die de meeste stemmen heeft behaald, bezet één van de zetels in het parlement. Met andere woorden, voor de vertaling van de verkiezingsuitslag is geen extra regel nodig. In Nederland met het systeem van evenredige vertegenwoordiging hebben we echter nog een regel nodig die de verkiezingsuitslag vertaalt naar de 150 zetels in de Tweede Kamer. Het probleem hierbij is dat de behaalde percentages stemmen niet eenduidig corresponderen met de 150 te verdelen zetels.

Stel er doen in Nederland vijf partijen mee aan de parlementsverkiezing en het aantal op de partijen uitgebrachte stemmen is als volgt:

partij	aantal stemmen	percentage	zetels
A	3.655.123	40,61	
B	2.211.003	24,57	
C	1.111.787	12,35	
D	1.034.876	11,50	
E	987.211	10,97	
	9.000,000	100%	150

Hoe verdelen we de 150 zetels zo eerlijk mogelijk over de vijf partijen? ‘Eerlijk’ betekent in dit verband dat de zetelverdeling zo goed mogelijk aansluit bij de stemmenverdeling. Laten we eerst eens kijken op hoeveel zetels de partijen op grond van het behaalde stempercentage recht hebben.

partij	fractie	fractie ×150
A	0,4061	60,915
B	0,2457	36,855
C	0,1235	18,525
D	0,1150	17,250
E	0,1097	16,455
	1	150

De fractie (percentage/100) van het totaal aantal stemmen van een partij keer het aantal te verdelen zetels heet het quotum van de partij. Het geeft het aantal zetels aan waarop de partij recht heeft. In formulevorm:

$$q_i = \frac{p_i}{\sum_k p_k} \cdot h$$

waarin q_i het quotum van partij i is, p_i het aantal behaalde stemmen en h het aantal te verdelen zetels. De sommatie loopt over alle partijen.

Onverdeelde zetels

Helaas zal dit quotum meestal geen natuurlijk getal zijn, waardoor een perfecte verdeling van de zetels niet mogelijk is. In bovenstaande tabel zien we dat partij A tenminste recht heeft op 60 zetels. Partij B heeft recht op tenminste 36 zetels, terwijl de partijen C, D en E recht hebben op respectievelijk tenminste 18, 17 en 16 zetels. Na de verdeling van deze zetels blijven er echter nog drie onverdeelde zetels over. Hoe moeten we die over de vijf partijen verdelen?
Een voor de hand liggende methode is om de overgebleven zetels toe te kennen aan de partijen met de grootste rest (= grootste decimale deel in het quotum). Immers, geen enkele partij kan nog aanspraak maken op een volledige zetel, maar partij A heeft nog aanspraak op 0,915 zetels terwijl partij D nog slechts aanspraak kan maken op 0,250 zetels. Het ligt derhalve voor de hand een onverdeelde zetel eerder aan A toe te kennen dan aan D. Als we deze methode hanteren dan worden de niet verdeelde zetels als volgt toegekend:

partij	zetels	restzetels	totaal
A	60	1	61
B	36	1	37
C	18	1	19
D	17	0	17
E	16	0	16
	147	3	150

Vergelijken we de verhoudingen van de op de partijen uitgebrachte stemmen met de aan de partijen toegekende zetels, dan zien we dat het ideaal van one man one vote redelijk is bereikt.

stemmen A : B : C : D : E =
3,81 : 2,31 : 1,19 : 1,06 : 1
zetels A : B : C : D : E =
3,70 : 2,26 : 1,13 : 1,05 : 1

Methode van Hamilton

De regel waarbij onverdeelde zetels worden toegekend aan de partijen met de grootste rest heet de methode van Hamilton. Alexander Hamilton was in 1792 voorstander van deze methode om de zetels in the House of Representatives in de Verenigde Staten te bepalen. Hierbij ging het om de verschillende staten met ongelijk inwonertal zo eerlijk mogelijk te representeren in het Huis van Afgevaardigden.
De methode van Hamilton om onverdeelde zetels toe te kennen heeft een aantal aantrekkelijke eigenschappen. In de eerste plaats is de methode anoniem, dat wil zeggen dat alleen het behaalde percentage stemmen telt. Met andere woorden geen enkele partij wordt voorgetrokken of achtergesteld. Ten tweede, als er een perfecte verdeling van de zetels mogelijk is (dus als alle quota gehele getallen zijn) dan leidt de methode ook tot die verdeling. Bovendien spelen alleen de relatieve verhoudingen een rol en niet de absolute aantallen. Als iedere partij twee keer zoveel stemmen krijgt dan verandert de zetelverdeling niet. Immers, de quota blijven gelijk zoals in formulevorm eenvoudig te zien is.

$$q'_i = \frac{cp_i}{\sum_k cp_k} h = \frac{cp_i}{c\sum_k p_k} h = \frac{p_i}{\sum_k p_k} h = q_i$$

Ten slotte geeft de regel in het geval van twee partijen de meest voor de hand liggende, of beter, de enig verdedigbare verdeling. Stel de partijen A en B moeten onder elkaar 20 zetels verdelen op basis van de onderstaande stemmenverdeling.

partij	stemmen	quota	zetels
A	3.042.000	12,168	12
B	1.958.000	7,832	8
	5.000.000	20	20

In eerste instantie krijgen A en B respectievelijk 12 en 7 zetels. B heeft het quotum met de grootste rest. De onverdeelde zetel gaat naar B, de partij met de grootste rest. In het geval van twee partijen is dit inderdaad de enige zinnige verdeling.
De regel van Hamilton kan worden gezien als een uitbreiding van dit principe tot meer partijen. Daarbij moet echter nog wel een kanttekening worden geplaatst. Stel dat drie partijen (A, B en C) 21 zetels moeten verdelen op basis van de volgende stemmenaantallen.

partij	stemmen	fractie	quota	zetels
A	36	0,679	14,259	14
B	6	0,113	2,373	3
C	11	0,208	4.368	4
	53	1	21	21

De onverdeelde zetel gaat naar B, de partij met de grootste rest. B en C hebben nu samen 7 van de 21 zetels. Is die verdeling van 7 zetels over B en C in overeenstemming met het principe van de grootste rest in het geval van twee partijen?

partij	stemmen	fractie	quota	zetels
B	6	0,353	2,471	2
C	11	0,647	4,529	5
	17	1	7	7

Zoals we zien, worden de 7 zetels van B en C verdeeld als 3 en 4 wanneer we de methode toepassen op het geheel (A, B en C). Hanteren we dezelfde methode om de 7 zetels over B en C te verdelen dan krijgen we een ander resultaat. De regel van Hamilton is niet *consistent*. Een regel heet consistent als de toepassing ervan op een deel hetzelfde resultaat geeft voor dat deel als in het geval dat we de regel toepassen op het geheel. Overigens kan de lezer nagaan dat ook de verdeling van de 17 zetels over A en B anders uitvalt als we de methode gebruiken om die 17 zetels over A en B te verdelen.
Er is nog een eigenschap van Hamiltons regel die aandacht verdient. Stel dat drie partijen 21 zetels moeten verdelen op basis van de volgende stemverhoudingen.

partij	stemmen	fractie	quota	zetels
A	727	0,678	14,238	14
B	123	0,115	2,415	3
C	222	0,207	4,347	4
	1072	1	21	21

Op basis van de quota gaat de onverdeelde zetel naar B. We breiden het parlement uit tot 22 zetels. Hoe moeten we nu de 22 zetels verdelen? Uiteraard behouden alle partijen minstens hun zetelaantal, maar welke partij heeft recht op de extra zetel? Om dat te kunnen bepalen moeten we de quota bepalen op basis van 22 zetels.

partij	stemmen	fractie	quota
A	727	0,678	14,916
B	123	0,115	2,530
C	222	0,207	4,554
	1072	1	22

In eerste instantie krijgen A, B en C respectievelijk 14, 2 en 4 zetels. De twee onverdeelde zetels gaan naar de partijen met de grootste rest: A en C. De samenstelling van het parlement wordt dus:

partij	stemmen	zetels	zetels
A	727	14	15
B	123	3	2
C	222	4	5
	1072	21	22

Een bizar resultaat voor B! Terwijl er méér zetels te verdelen zijn, krijgt B er één minder.
Deze merkwaardige uitkomst staat bekend als de *Alabama Paradox*.
In 1880 berekende C.W. Seaton de samenstelling van het Huis van Afgevaardigden voor zetelaantallen van 275 tot 350. Tot zijn verbazing vond hij dat de staat Alabama bij 299 zetels 8 zetels zou worden toegekend terwijl bij 300 zetels Alabama slechts 7 zetels zou krijgen. Voor hem een duidelijk bewijs dat Hamiltons regel niet deugde.

Literatuur

- M.L. Balinski, H.P. Young (1982): *Fair Representation, Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. New Haven: Yale University Press (1982).
- Alex Bogomolny (2002): *The Constitution and Paradoxes*. Op: *www.cut-the-knot.org/ctk/Democracy.shtml*.

Over de auteur

Rob Bosch is redacteur van *Euclides* en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.
E-mailadres: *r.bosch2@nlda.nl*

Rekenen in het voortgezet onderwijs als voorbereiding op de pabo

[Frank van Merwijk en Harrie Sormani]

Dagelijks stonden dit jaar berichten in de krant over het slechte rekenniveau van de pabo-studenten. In dit artikel geven Frank van Merwijk en Harrie Sormani, leraren-opleiders rekenen en wiskunde, een overzicht van de stand van de zaken en houden zij een pleidooi voor een betere aansluiting bij rekenen tussen het havo, vwo en mbo enerzijds en het hbo anderzijds.

Rekenvaardigheden voor de burger

Hoe lang deed de ambtenaar over het inschrijven van de getallen 1 tot en met 1.000.000.000 in het boek dat hij aanlegde voor de (verzonnen) volkstelling in China, eind vorige eeuw (met toen nog ongeveer 1 miljard inwoners)?
Hoeveel euro's passen er in dit lokaal?
Schat eens intuïtief (snel zeggen zonder al te veel nadenken), hoeveel liter water er op de vloer van een fabriekshal van 50 bij 40 meter ligt, als er volgens een nieuwsbericht na een waterhoos via een lekkend dak 2 centimeter water op terecht is gekomen?
Past de wereldbevolking in de provincie Utrecht?

Dit zijn enkele voorbeelden van vragen die kunnen leiden tot levendige reken-wiskundeactiviteiten. Het zijn voorbeelden van lesintroducties op onze pabo. Ze zijn zeer geschikt voor een interactieve aanpak. Dat kan door middel van een leergesprek in de klas, gevolgd door coöperatief werken, waarna in een gezamenlijke reflectie de conclusies en de verschillende rekenstrategieën nog eens op een rij worden gezet. Vakinhoudelijk gaat het onder meer over meten van lengte en oppervlakte en inhoud, oriëntatie op de landkaart van Nederland, metriek stelsel, grote getallen, machten van 10, schattend en handig globaal rekenen.

Dergelijke opdrachten geven een beeld van de rekenvaardigheden waarover een burger in Nederland moet beschikken om zich staande te kunnen houden in de samenleving. Vaardigheden die kinderen op de basisschool moeten leren en waarover leerkrachten in het basisonderwijs minimaal moeten beschikken. Het was voor buitenstaanders misschien even slikken toen de uitslag van de nieuwe entreetoets rekenen-wiskunde voor de pabo uitwees dat slechts ongeveer 50% van de studenten bij de eerste toetsing toelaatbaar bleek. Deze studenten hadden het rekenniveau van het begin van groep 8 van de basisschool. De andere 50% van de studenten zat daar kennelijk onder.
De meeste pabo-docenten waren door deze uitslag niet verbaasd. Zij weten al jaren, dat er in het eerste jaar van de pabo nog heel wat moet gebeuren om de rekenvaardigheid van de studenten net boven het niveau van de basisschool uit te tillen. Op de meeste pabo's is er hiervoor in het eerste jaar een ondersteuningsprogramma. Dit heeft tot gevolg dat het grootste deel van de studenten na het eerste jaar weer minstens op het niveau van groep 8 is.

Propedeuse-eis

Tot vorig schooljaar bepaalde elke pabo zijn eigen propedeuse-eisen. Een enkeling moest wegens onvoldoende kennis en vaardigheid op het gebied van rekenen de pabo aan het eind van de propedeuse verlaten, de meeste studenten gingen verder, al of niet bijgespijkerd, maar op voldoende niveau.
Vanaf dit schooljaar is er de door het Cito aangeleverde, centraal georganiseerde entreetoets rekenen voor de pabo. Iedere student krijgt drie kansen om de score van 103 te halen, grofweg vergelijkbaar met het niveau van groep 8. Deze entreetoets wordt aan de computer afgenomen en vandaar ter correctie doorgestuurd naar het Cito. Heeft de student na drie toetsen niet voldoende punten behaald dan dient hij de pabo te verlaten.
De entreetoets die op vrijwel alle pabo's in september 2006 is afgenomen, bevestigt wat al jaren bekend is. Van de studenten met vooropleiding vwo haalde 87% het niveau van begin groep 8, van de voormalige havisten waren dat er 58% en van de studenten met vooropleiding mbo waren dat er 33%.
Daarnaast heeft ongeveer de helft van de pabo's daarbovenop een propedeuse-eis geformuleerd die tot een negatief bindend studieadvies leidt als de student er niet aan voldoet. De overige pabo's hebben geen propedeuse-eis bovenop de landelijk verplichte toets. Wij vinden het zeer wenselijk dat alle pabo's dezelfde of op zijn minst een vergelijkbare propedeuse-eis hanteren.

Het regulier programma rekenen-wiskunde en didactiek

Het reguliere programma bevat van het eerste tot en met het vierde jaar lessen reken-wiskundedidactiek, die de studenten voorbereiden op hun activiteiten in de groepen van de basisschool. Op onze pabo gaat het om gemiddeld iets minder dan één uur per week contacttijd en evenveel zelfstudietijd. In deze lessen wordt niet alleen onderricht gegeven in de didactiek van het onderwijzen van reken-wiskundige vaardigheden bij kinderen in de basisschool,

de student krijgt ook veel gelegenheid zijn reken-wiskundige kennis verder uit te bouwen. Belangrijk is wel dat voor de inhoud van deze lessen ook bij de doorvoering van het competentiegerichte leren voldoende aandacht blijft. De Stichting Beroepskwaliteit Leraren (SBL) heeft de kern van het Leraarschap in zeven competenties beschreven. Deze competenties zijn richtinggevend voor de lerarenopleidingen en luiden als volgt[1]:

- Een goede leraar is interpersoonlijk competent. Hij kan op een goede, professionele manier met leerlingen omgaan.
- Een goede leraar is pedagogisch competent. Hij kan de leerlingen in een veilige werkomgeving houvast en structuur bieden om zich sociaal-emotioneel en moreel te kunnen ontwikkelen.
- Een goede leraar is vakinhoudelijk en didactisch competent. Hij kan de leerlingen helpen zich de culturele bagage eigen te maken die iedereen nodig heeft in de hedendaagse samenleving.
- Een goede leraar is organisatorisch competent. Hij kan zorgen voor een overzichtelijke, ordelijke en taakgerichte sfeer in zijn groep of klas.
- Een goede leraar is competent in het samenwerken met collega's. Hij kan een professionele bijdrage leveren aan een goed pedagogisch en didactisch klimaat op de school, aan een goede onderlinge samenwerking en aan een goede schoolorganisatie.
- Een goede leraar is competent in het samenwerken met de omgeving van de school. Hij kan op een professionele manier communiceren met ouders en andere betrokkenen bij de vorming en opleiding van zijn leerlingen.
- Een goede leraar is competent in reflectie en ontwikkeling. Hij kan op een professionele manier over zijn bekwaamheid en beroepsopvattingen nadenken. Hij kan zijn professionaliteit ontwikkelen en bij de tijd houden.

Een punt van zorg in deze opsomming is of de vakinhoudelijke en didactische competentie voor het vak rekenen-wiskunde voldoende aandacht krijgt. Het is nu een onderdeel van de (algemene) vakinhoudelijke en didactische competentie, waaronder ook de andere vakdidactische onderdelen van de pabo zoals Engels en bewegingsonderwijs vallen. Een gevaar is dat er te optimistisch gedacht wordt over de transfermogelijkheden tussen de verschillende vakken. In onze ogen is het niet zo dat een leerkracht die taal- of godsdienstonderwijs kan verzorgen ook automatisch reken-wiskundeonderwijs kan verzorgen. Hiervoor is een specifieke vakdidactische deskundigheid op het gebied van reken-wiskunde nodig, die op de pabo een eigen plaats moet houden. Voor een leerkracht die een uur per dag rekenles (de standaard ingeroosterde tijd voor rekenen-wiskunde op de basisschool) moet geven, is het van groot belang te blijven werken aan de vakdidactische competentie rekenen-wiskunde.

Naar aanleiding van de uitslag van de entreetoets in september waren in de media en op verjaardagen de pabo-studenten de gebeten hond. Zij waren de meest domme Nederlanders van het moment, zo leek het wel. Dit beeld is niet correct. Het probleem bij deze uitslagen is meer: hoe komt het dat de gemiddelde student zoveel verleerd is van wat hij of zij eens gekend en gekund heeft op de basisschool? Recent werd duidelijk, dat ook andere opleidingen binnen het wo en hbo klagen over de vaardigheden van vwo- en havo-gediplomeerden, zodat we hier over een meer algemeen probleem kunnen spreken. Duidelijk is dat van de afgestudeerden in het voortgezet onderwijs een belangrijk deel niet meer beschikt over de meest elementaire vaardigheden op het gebied van rekenen.

Oorzaken in het voortgezet onderwijs

Hoe heeft het zo ver kunnen komen?
Een eerste mogelijke oorzaak is het gebruik van de rekenmachine in het voortgezet onderwijs. De scholier maakt hiervan voor al zijn rekenwerk gebruik en rekent ook opgaven als 3 × 8 machinaal uit. Op de basisschool leren de leerlingen in het algemeen niet om het rekenmachientje zelfstandig te gebruiken. In het voortgezet onderwijs krijgen zij vanaf de brugklas de beschikking over een eigen rekenmachine zonder dat deze op een goede manier wordt geïntroduceerd. Je ziet de leerlingen er vervolgens op twee manieren onverstandig mee werken. Allereerst nemen ze, vanuit een grenzeloos vertrouwen dat wat het machientje op het venster laat zien altijd waar is, meestal de uitkomst zomaar over. Ze controleren de uitkomst niet, waardoor foutieve invoer niet wordt herkend.
Op de tweede plaats halen middelbare scholieren voor elke berekening het apparaatje uit de tas, zelfs voor sommen als 5 + 5 = … en 2 × 4 = … Iedere vorm van hoofdrekenen, belangrijk voor schattend rekenen en het globaal bepalen van de uitkomst van een opgave, is zo voor hen onmogelijk.
Begeleiding bij het gebruik van het rekenmachine is dus noodzakelijk. Jan van den Brink geeft daarvoor in het *Euclides*-themanummer *'Rekenen & Rekenonderwijs'* van twee jaar geleden [2] aanwijzingen die wij zeer aanbevelen, zoals het rekenmachinedictee en het gezamenlijk oefenen van schattend rekenen met behulp van de rekenmachine.
Een tweede mogelijke oorzaak van de gebrekkige rekenvaardigheid is dat er in het voortgezet onderwijs te vaak 'papieren onderwijs' wordt gegeven. Dat wil zeggen dat de leerlingen aan opgaven uit het boek werken, waarna ze vaak met behulp van het antwoordenboek zichzelf controleren. Wij zouden graag zien dat de leerkracht de rol van inspirator op zich neemt en daarnaast ook de uitwisseling van aanpakken en oplossingen organiseert. In het al eerder genoemde themanummer over rekenen schrijft Hoogland over het belang van gecijferdheid voor het dagelijks leven [3]. Hij geeft de volgende vuistregels om de leerlingen goed voor te bereiden op de kwantitatieve kant van de maatschappij:

- maak de reken- en wiskundesituaties zo realistisch mogelijk;
- besteed veel aandacht aan dialoog met en tussen leerlingen over aanpak, interpretaties en meningen;
- maak leerlingen expliciet bewust van de vele kwantitatieve aspecten van de wereld om ons heen.

Deze vuistregels van Hoogland overlappen voor een groot deel de onderwijs- en leerprincipes van realistisch reken-wiskundeonderwijs: contexten en de eigen leefwereld van de leerlingen vormen uitgangspunten voor de diverse leergangen: het eerste principe. Daarnaast zijn interactie tussen leraar en leerlingen en tussen de leerlingen onderling en reflectie essentiële onderdelen van de reken-wiskundeles.
De interactieve en reflectieve aanpak is gaandeweg praktijk geworden op de basisschool. In de rekenlessen binnen het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs is deze aanpak heel wat minder gebruikelijk, wat bevestigd wordt door ervaringen van onze wiskundestudenten in de stage. Dat de methodeboeken zijn overgestapt op de

realistische didactiek heeft daar niet zoveel aan veranderd.
De klassenorganisatie van het vakonderdeel rekenen op het havo en het vwo is vaak beperkt tot zelfstandig werken en nakijken uit het uitkomstenboek, een enkele keer voorafgegaan door een korte instructie door de leraar. Interactieve en reflectieve (na)bespreking komt zelden aan bod.
Hoogland zegt: '…besteed veel aandacht aan dialoog…', en dat zeggen wij hem van harte na. Je maakt het probleem op die manier levendig en je stimuleert de leerlingen om erover na te gaan denken; je helpt hen hun gedachten te formuleren; je laat als leraar merken dat je niet zozeer in de uitkomst geïnteresseerd bent, maar wel en vooral in oplossingsstrategieën, liefst verschillende; je stimuleert leerlingen verder na te denken over de oplossing: heb je er wat aan, klopt hij wel, is er nog een andere manier, bijvoorbeeld om die uitkomst te controleren, kan je oplossingswijze efficiënter, enzovoort. Allemaal overwegingen waar leerlingen veel (wiskunde) van leren.
In het volgende stukje beschrijven wij een voorbeeld van zo'n aanpak.



Hoeveel studenten per vierkante meter?

Past de wereldbevolking in de provincie Utrecht?
Om te beginnen stellen we de vraag of er voor de (uiteraard fictieve) jaarvergadering van alle Nederlanders genoeg ruimte om te staan is in de provincie Utrecht. Meestal wordt die vraag bevestigend beantwoord. Vervolgens is het intuïtieve antwoord op de vraag of dit ook geldt voor de wereldbevolking: 'Ik denk het niet.'
Dat is het moment om te onderzoeken hoeveel studenten er op een vierkant meter passen. De meter in het vierkant wordt zo precies mogelijk op de vloer geconstrueerd en meestal passen er wel 13 pabo-studenten op (of 19 à 20 brugklassers).
Dan is het tijd om de oppervlakte te schatten van de provincie Utrecht. Topografische kennis en persoonlijke referentiematen worden van stal gehaald om dit probleem te tackelen. Meestal komt men op ongeveer een rechthoek van 30 bij 40 of van 40 bij 50 kilometer uit.
De oppervlakte wordt uitgerekend in vierkante kilometers en dat wordt omgezet in vierkante meters.
Vervolgens weet iemand uit de klas vast wel hoeveel bewoners onze planeet ongeveer telt. De conclusie moet dan zijn dat op die 1,2 à 2 miljard vierkant meters met gemak 6,5 miljard mensen te plaatsen zijn.
Sommige studenten kunnen dat niet geloven, wat weer aanleiding tot reflectie achteraf is: de denkprocedure wordt nog eens doorgelopen, de strategieën en het rekenwerk herbezien.
Overwegingen als 'een vierkante meter is niet altijd een meter in het vierkant' en 'waarom komen er bij de overgang van km^2 naar m^2 geen drie maar zes nullen bij?' worden tijdens de rit of eventueel achteraf aan de orde gesteld.

Grote getallen en metriek stelsel zijn de inhoudelijke onderwerpen van deze activiteit. Uitwisseling van denkstrategieën door naar de aanpak van een ander te luisteren en er commentaar op te geven vormt een essentieel onderdeel hiervan.

Dit soort activiteiten zijn leuk en bijzonder leerzaam. Ze zorgen ervoor dat sluimerende vaardigheden weer eens van stal worden gehaald en opnieuw doordacht worden en daardoor geconsolideerd. Dergelijke rekenactiviteiten moeten op de pabo aan bod komen en dienen ook een belangrijk onderdeel te vormen van het wiskundeonderwijs op het havo, vwo en mbo.
De leerlingen moeten hun hoofdrekenen blijven onderhouden. Allerlei rekenwerk, grote getallen, hoofdbewerkingen, rekenwerk met breuken, kommagetallen en procenten, maar ook merkwaardige producten lenen zich voor korte activiteiten aan het begin van de wiskundeles. Het is toch een geweldige ontdekking dat opgaven als 38 × 42 uitgerekend kunnen worden met de algebraïsche regel $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. De aftrekking 1600 – 4 is per slot van rekening snel uitgerekend. Zo heb je nog eens wat aan wiskunde!

Regelmatig oefenen van allerlei basisvaardigheden (vijftien minuten structureel per week naast elk aan te grijpen rekenincident is volgens ons voldoende) helpt de leerlingen om veel kwantitatieve situaties vlot te overzien en daarbij niet al te zeer afhankelijk te zijn van elektronische hulpmiddelen. Bovendien moeten ze vlot weten of de gegeven uitkomst wel of niet kan kloppen. Daarvoor is het nodig, hardop met de leerlingen te reflecteren over uiteenlopende kwesties waar hoeveelheden en/of meetkunde een rol spelen. Hopelijk komen ze zo aan het eind van de rit beter gecijferd van school af, want het is belangrijk dat de leerlingen in het voortgezet onderwijs via dergelijke opdrachten hun rekenvaardigheid onderhouden en verder uitbouwen - een vaardigheid die hun zeer van pas komt op de pabo. Een goede gecijferdheid is evenwel ook onmisbaar voor andere beroepen, zoals verpleger of accountant, en bovendien een essentiële voorwaarde voor het goed kunnen functioneren als burger. Als de wiskundeleraren op het havo, vwo en mbo ervoor zorgen dat hun leerlingen voldoende gecijferd zijn, zullen deze ook minder moeite hebben met de rekenvaardigheid die voor de pabo noodzakelijk is.

Noten
[1] Overgenomen van *www.lerarenweb.nl.*
[2] Jan van den Brink: *Verrijken door vermijden; de rekenmachine op de basisschool.* In: *Euclides 80(4)*, januari 2005.
[3] Kees Hoogland: *Gecijferd.* In: *Euclides 80(4)*, januari 2005.

Over de auteurs
Frank van Merwijk en Harrie Sormani zijn werkzaam als reken-wiskundedocent op Pabo Arnhem van Hogeschool Arnhem-Nijmegen. Frank van Merwijk is tevens opleider op de lerarenopleiding wiskunde 2e graads in Nijmegen.
E-mailadressen: *frank.vanmerwijk@han.nl* en *harrie.sormani@han.nl*

Leesbaarheid gevangen in formules?

OP ZOEK NAAR NIEUWE VORM EN INHOUD VAN WISKUNDE C

[Gerard Koolstra]

Inleiding

Het wiskunde-C-programma dat vanaf het komende cursusjaar stapsgewijs van kracht wordt op het vwo is, zoals bekend, in grote lijnen gelijk aan het oude programma voor wiskunde A1, met wat meer ruimte en aandacht voor keuzeonderwerpen. Al langere tijd wordt behoefte gevoeld om dat programma wat meer af te stemmen op de doelgroep (leerlingen die het profiel Cultuur en Maatschappij hebben gekozen), mede gezien hun capaciteiten, interesses en vervolgopleidingen. Bij het domein *Functies en Grafieken* is dat op dit moment duidelijk niet het geval. De globale omschrijving van de eindtermen is voor wiskunde A, B en C nagenoeg identiek, en in de uitwerking lijkt het belangrijkste verschil dat bij wiskunde C wat minder gedaan hoeft te worden.

Ondertussen is in de praktijk van het (nu 'oude') A1-programma wel vaak een wat andere invulling aan dit domein gegeven dan bij wiskunde B en (in wat mindere mate) wiskunde A12. Dit komt onder andere tot uiting in de examenopgaven, waarbij opvallen:

- de vaak grote hoeveelheden tekst en de soms gecompliceerde contexten;
- het grote beroep dat soms gedaan wordt op 'gezond verstand' en vrij elementair rekenwerk;
- het betrekkelijk geringe beroep op kennis en vaardigheden zoals in de eindtermen beschreven.

Het lijkt de hoogste tijd om de beschrijvingen wat meer aan te passen aan de gegroeide praktijk, maar vooral ook om na te gaan hoe het wiskundeonderwijs rond een thema als functies (of 'verbanden') er voor deze doelgroep zou moeten en kunnen uitzien. In het kader van de werkgroep wiskunde C van cTWO heb ik vanuit deze achtergrond materiaal ontwikkeld en op kleine schaal uitgeprobeerd rond het thema *leesbaarheidsformules*.

Onderwerpkeuze

In het profiel C&M spelen talen een belangrijke rol, en veel C&M-leerlingen hebben bovendien een grotere affiniteit met talen dan met vakken als economie en wiskunde. Voor sommige leerlingen is de positie van wiskunde als profielvak geen vanzelfsprekende, en de relatie met de andere profielvakken is niet zelden onduidelijk. Wat dit betreft verschilt de situatie aanzienlijk met die in de andere drie profielen (hoewel daar ook het een en ander te doen valt).

Het onderwerp *leesbaarheidsformules* is naar mijn idee erg geschikt om concreet in te gaan op de vraag welke rol wiskundige formules kunnen spelen bij het beter grip krijgen op in eerste instantie tamelijk gecompliceerde begrippen die gehanteerd worden in 'de alfa-wereld', zoals in dit geval de moeilijkheidsgraad van teksten. Het onderwerp is trouwens niet nieuw. Het kwam onder andere aan de orde in de methode *Wiskunde Lijn*, in eindexamens, en het wordt ook wel gebruikt als thema voor een praktische opdracht. Een werkstuk van twee van mijn (wiskunde A) leerlingen over dit onderwerp zette me aan het denken over de potentie van dit onderwerp. Om de mogelijkheden wat beter te verkennen heb ik in de zomer van 2006 lesmateriaal geschreven en in de herfst van dat jaar uitgeprobeerd met een klein groepje leerlingen (wiskunde A1) in 5-vwo. Daarvoor had ik in eerste instantie vier weken (8 lessen) uitgetrokken.

Hieronder wil ik een paar stukjes van dat materiaal bespreken, met aandacht voor achterliggende uitgangspunten en ervaringen.

In de eerste week (twee lessen) stond de formule van Brouwer centraal:

Een voor Nederlandse teksten veel gebruikte formule is de leesindex van R.H.M. Brouwer uit 1963:
$A = 195 - 66{,}7 \cdot W - 2 \cdot Z$
waarin:
W (woordlengte): is het gemiddeld aantal lettergrepen per woord;
Z (zinslengte): is het gemiddeld aantal woorden per zin.

Naar aanleiding van deze formule worden wat opdrachten en vragen gesteld die gericht zijn op het vertrouwd raken met deze formule, en in het verlengde daarvan het echt begrijpen daarvan.

In deze vragen en opdrachten komen onder meer aan de orde:

- Het gebruiken van de formule bij een aantal gegeven teksten;
- teksten schrijven met (bij benadering) een voorgeschreven uitkomst;
- de invloed van de diverse variabelen (zoals woordlengte) op de uitkomst;
- mogelijke uitkomsten (bereik van de functie);
- onderlinge vergelijking van twee varianten van deze formule;
- het uitdrukken van Z in W (en omgekeerd) bij een bepaalde waarde van A;
- het uitdrukken van A in Z bij een constante W (of in W bij constante Z);
- diverse grafische voorstellingen, waaronder ook niveaulijnen;

W: aantal lettergrepen per woord

Z: aantal woorden per zin	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	122	116	109	102	96	89	82	76	69	62	56	49	42	36	29	22	
4	120	114	107	100	94	87	80	74	67	60	54	47	40	34	27	20	
5	118	112	105	98	92	85	78	72	65	58	52	45	38	32	25	18	
6	116	110	103	96	90	83	76	70	63	56	50	43	36	30	23	16	
7	114	108	101	94	88	81	74	68	61	54	48	41	34	28	21	14	
8	112	106	99	92	86	79	72	66	59	52	46	39	32	26	19	12	
9	110	104	97	90	84	77	70	64	57	50	44	37	30	24	17	10	
10	108	102	95	88	82	75	68	62	55	48	42	35	28	22	15	8	
11	106	100	93	86	80	73	66	60	53	46	40	33	26	20	13	6	
12	104	98	91	84	78	71	64	58	51	44	38	31	24	18	11	4	
13	102	96	89	82	76	69	62	56	49	42	36	29	22	16	9	2	
14	100	94	87	80	74	67	60	54	47	40	34	27	20	14	7	0	
15	98	92	85	78	72	65	58	52	45	38	32	25	18	12	5	-2	
16																	

figuur 1

- onderzoek van de formule aan de hand van een tweedimensionale tabel (zie de tabel in ***figuur 1***).

Eerste ervaringen

Het aardige van het werken met een klein groepje (7 leerlingen) is dat je vrij goed een beeld kunt krijgen van (mentale) activiteiten van de leerlingen. Het voeren van echte gesprekken naar aanleiding van gemaakte opdrachten is in zo'n situatie een stuk eenvoudiger dan wanneer je een volle klas voor je neus hebt. De eerste ervaringen waren zeer hoopgevend. De leerlingen vonden het een aardig onderwerp en konden ook goed 'heen en weer pendelen' tussen formule en achterliggende werkelijkheid. Dit kwam goed van pas bij 'verraderlijke' vragen als: *Wat heeft naar jouw idee een sterkere invloed op de leesindex van Brouwer, de woordlengte of de zinslengte*?

Het ligt voor de hand om naar de coëfficiënten te kijken en dan lijkt de 'woordlengte' de duidelijke winnaar. Bij een variant op de formule van Brouwer waarbij het gemiddeld aantal lettergrepen per 100 woorden wordt gebruikt, lijken de rollen echter omgedraaid:

$A = 195 - (\frac{2}{3}) \cdot WL - 2 \cdot ZL$

In de discussie werd al snel duidelijk dat een goede vergelijking lastig is, en dat je tenminste rekening moet houden met de 'normale' grootte van de variabelen. Een gemiddelde woordlengte van 3 is extreem hoog, terwijl een gemiddelde zinslengte van 3 wel erg kort is. Wel kunnen de coëfficiënten goed gebruikt worden om formules die op dezelfde manier zijn opgebouwd onderling te vergelijken.

Een manier om een goed gevoel te krijgen voor de 'werking' van een leesbaarheidsformule is het berekenen van de scores van veel en uiteenlopende teksten. Handmatig is dat al gauw erg tijdrovend, maar gelukkig zijn er allerlei hulpprogramma's beschikbaar (onder meer via internet) die het werk deels uit handen nemen. Een andere aanpak, die wat meer ruimte biedt voor eigen benaderingen en persoonlijke voorkeuren, is het schrijven van een tekst met een voorgeschreven score. Het expliciet maken van een impliciet verband tussen twee variabelen kan daarbij helpen.

Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} 195 - 66{,}7 \cdot W - 2 \cdot Z &= 100 \iff \\ -66{,}7 \cdot W - 2 \cdot Z &= -95 \iff \\ 66{,}7 \cdot W + 2 \cdot Z &= 95 \iff \\ Z &= \ldots\ldots \end{aligned}$$

In het materiaal en de lessen is expliciet aandacht besteed aan zaken als het 'omwerken' van formules. De leerlingen pakten dat goed op. Een belangrijk element hierbij was dat de zin van deze activiteiten (voor hen) helder was. Een ander element was dat het goed mogelijk bleek de betekenis van verschillende 'halfproducten' (zoals een vergelijking van een iso-lijn) te doorgronden. Een 'hoogtelijnenkaartje' wordt dan ook echt een kaart waarmee je je beter kunt oriënteren.

Grafische voorstellingen

Algebraïsche vaardigheden komen ook zeer van pas bij het maken van grafische voorstellingen. Het onderwerp *Functies van twee variabelen* vormde vroeger een belangrijk onderdeel van wiskunde A, maar het is door de diverse aanpassingen geleidelijk uit het programma verdwenen. Dat is jammer omdat er allerlei aansprekende voorbeelden zijn. Naast diverse leesbaarheidsformules kan bijvoorbeeld gedacht worden aan de beroemde BMI (*Body Mass Index*), formules voor gevoelstemperatuur, et cetera.

Het maken van een goede grafische voorstelling in de vorm van een 'hoogtelijnenkaartje' is wat meer werk dan het intypen van een formule op de grafische rekenmachine, maar het is goed te doen. Het resultaat geeft meteen een goed beeld van de zogeheten AVI-leesniveaus zoals die in het basisonderwijs (en in bibliotheken) gebruikt worden; ***zie figuur 2***. Bij deze AVI-niveau's is niet alleen de leesindex bepalend. Voor niveau 7 geldt bijvoorbeeld:

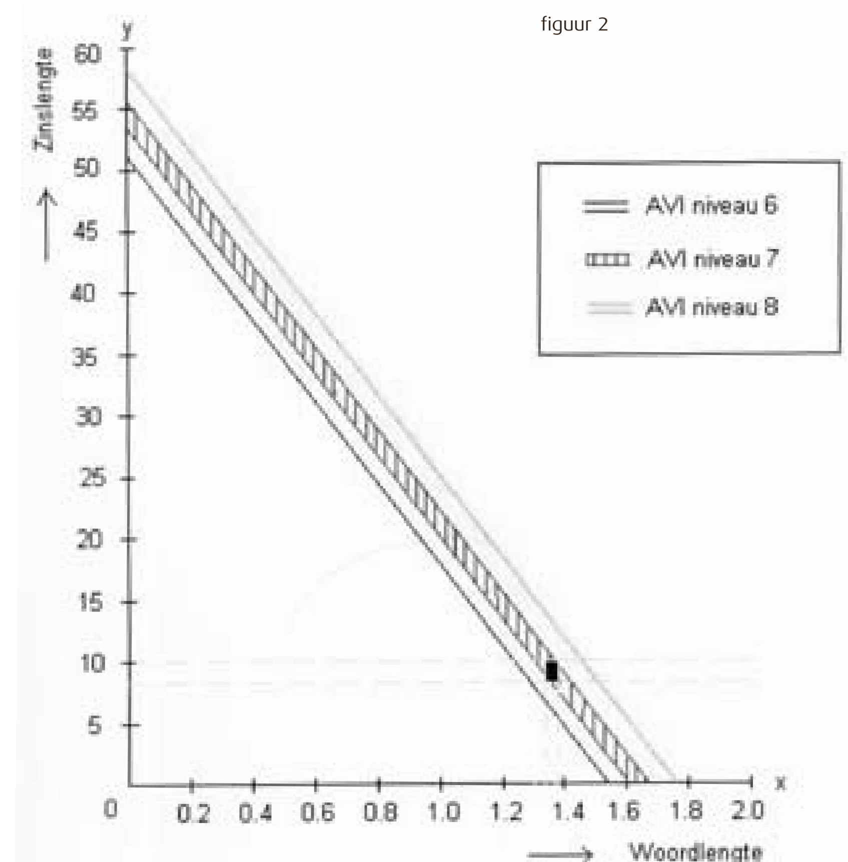
- Leesindex A: 88–84.
- Gemiddelde woordlengte: 1,34–1,39 lettergrepen.
- Gemiddelde zinslengte: 8–10 woorden.

Een aardige vraag is natuurlijk, in hoeverre een of meer van de drie voorwaarden overbodig zijn.

Eerder was al duidelijk geworden dat eigenlijk drie gegevens nodig zijn om de leesbaarheid van een tekst te bepalen:

- het (totaal) aantal woorden,
- het aantal zinnen,
- het aantal lettergrepen.

Een alternatieve formule (de *Automated Readability Index*: ARI) werkt niet met



figuur 2

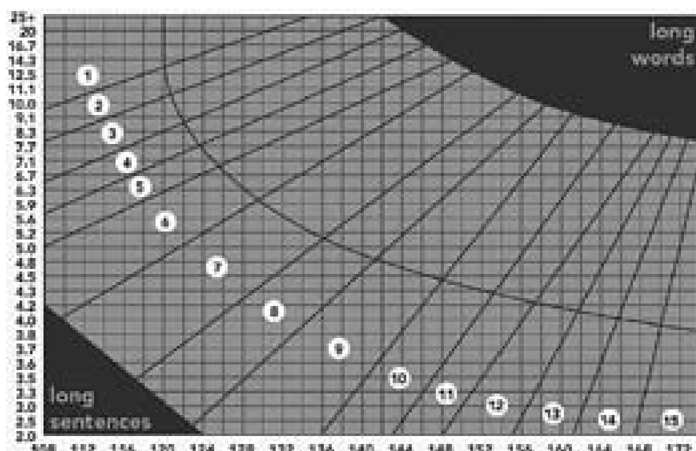
lettergrepen, maar met tekens (letters, cijfers etc.). Dit omdat het automatisch bepalen van het aantal lettergrepen lastig is. Uitgedrukt in aantallen *T*ekens, *W*oorden en *Z*innen ziet deze formule er als volgt uit:

$$ARI = 4{,}71\frac{T}{W} + 0{,}5\frac{W}{Z} - 21{,}43$$

Met drie variabelen zijn hoogtelijnenkaartjes minder bruikbaar. Wel geschikt is een aanpak die wel *ceteris paribus* wordt genoemd, waarbij alle variabelen op één na constant worden gehouden (zie daarvoor onderstaande toelichting en opdrachten).

Het veranderen van één variabele terwijl de andere gelijk blijven, wordt wel aangeduid als ceteris paribus. Wanneer het aantal tekens toeneemt, betekent dit (ceteris paribus) een grotere ARI. Soms worden woorden gesplitst. In plaats van langskomen, zie je ook langs komen. Het aantal tekens per woord wordt kleiner, betekent een kleinere ARI. Maar het aantal woorden per zin wordt groter, heeft het omgekeerde effect.
Welk effect het grootst is, hangt af van diverse factoren.

- Laat in tabel en grafiek zien wat het effect is van meer tekens (ceteris paribus).
- Laat in tabel en grafiek zien wat het effect is van meer zinnen (ceteris paribus).
- Laat in tabel en grafiek zien wat het effect is van meer woorden (ceteris paribus).



figuur 3

De verticale schaalverdeling is wat merkwaardig.

a. Laat zien dat het **geen logaritmische** schaalverdeling is.

b. Ga na dat er meer regelmaat te zien is als je het bijbehorende *aantal woorden per zin* (i.p.v. aantal zinnen per 100 woorden) berekent.

De grens tussen *grade levels* 4 en 5 wordt bepaald met de volgende vergelijking

$$z = 0{,}4 \cdot x - 40{,}6$$

waarin:

x = gemiddeld aantal lettergrepen per 100 woorden;

$z = 28 - \frac{100}{y}$, met y = gemiddeld aantal zinnen per 100 woorden.

c. Herschrijf de grenslijn als een verband tussen W (aantal lettergrepen per woord) en Z (aantal woorden per zin).

figuur 4

Kies een stuk tekst, en een leesbaarheidsformule.

a. Laat de score berekenen.

b. Pas de tekst zo aan dat de leesbaarheid niet echt verandert, maar de score wel.

c. Schrijf een moeilijk leesbare tekst die toch het predikaat "makkelijk" krijgt.

d. Schrijf een makkelijk leesbare tekst die als uitkomst "moeilijk" krijgt.

figuur 5

Naast het zelf maken van grafische voorstellingen is het interpreteren en begrijpen van bestaande grafische voorstellingen van belang. De Fry Readability Graph is een zeer interessante grafische voorstelling, die aanleiding kan zijn tot veel denk- en rekenwerk; ***zie figuur 3*** en de opgave in ***figuur 4***.
De opgave is bepaald niet makkelijk, maar wel noodzakelijk om het verband tussen deze nieuwe indeling en voorgaande enigszins te doorgronden.

Tenslotte is er ook nog enige aandacht besteed aan niet-lineaire formules zoals de SMOG:

$$S = \sqrt{m \cdot \frac{30}{z}} + 3$$

In totaal is dan een zevental formules de revue gepasseerd.

Kritisch bekijken

Bij het begrijpen van formules, in dit geval leesbaarheidsformules, hoort ook het zien en doorgronden van de beperkingen. Dit gaat veel verder dan dooddoeners als: '*je kunt niet alles in formules vatten*'.
Een aardige manier om dit te doen is te proberen de formules 'te slim af te zijn'; ***zie figuur 5***.
Om een indruk te krijgen wat leerlingen met een dergelijke opdracht (kunnen) doen, volgt hieronder een deel van de uitwerking van een tweetal leerlingen van opdracht c en d.

Leerling A.
Allerlei mooie bloemen bloeien in de weide. Annabella heeft een rietenmandje in haar handen. Ze plukt de mooiste bloemen die ze tegen komt. Deze fleurige bloemen zijn voor Oma Johanna. Oma Johanna houdt van mooie bloemen. Annabella heeft niet gezien dat er ook een zwart-witte koe in de groene, uitgestrekte weide staat. Dit vindt Annabella wel een beetje eng, en vlug loopt Annabella weg.
120 lettergrepen; 64 woorden; 7 zinnen; W=1,88; Z=9,14
Uitkomst formule Douma 53,54

Leerling B.
Fysiek kon zij het nog wel aan. De foetus in haar buik niet. Languit lag zij in haar fauteuil. In het holst van de nacht was het gebeurd. Vandaar de nu passieve houding van de vrouw. Ook als weet ze dat aan alles een eind komt. Dit was veel te spoedig.
61 lettergrepen; 51 woorden; 7 zinnen; W=1,2; Z=7,3
Uitkomst formule Douma 107,51

De eerste tekst is volgens de gebruikte formule redelijk lastig, de tweede zeer gemakkelijk. Een prachtige manier om de beperking aan te geven van formules die gebaseerd zijn op woord- en zinslengte.

Over de bruikbaarheid van (de gangbare) leesbaarheidsformules wordt trouwens ook door deskundigen verschillend gedacht. Sommigen maken kritische kanttekeningen, anderen wijzen op de vrij sterke correlatie met scores op toetsen die het tekstbegrip testen. In de VS gaan veel officiële documenten de deur niet uit voordat de leesbaarheid met behulp van een van de gangbare formules is vastgesteld.

Vorm en inhoud

Veel van de (ruim 60) opdrachten zijn enerzijds vrij tijdrovend, maar geven anderzijds ruim gelegenheid tot eigen inbreng en vormgeving. Dat geldt vooral voor de laatste serie opdrachten, waarbij eigenschappen van diverse leesbaarheidsformules moesten worden vergeleken, en uiteindelijk (een aanzet tot) een eigen formule gevraagd wordt. Dit soort werk past meer bij een werkstuk, zo u wilt een praktische opdracht, waarbij leerlingen meer hun eigen weg gaan. Het kan heel vruchtbaar zijn om rond een thema diverse werkvormen af te wisselen. In dit kader past ook het toewijzen van diverse formules aan groepjes of personen die daarover een presentatie moeten houden. Die werkvorm heb ik echter (nog) niet toegepast.

Voorlopige conclusies

Eén zwaluw maakt nog geen zomer, en een aardig verlopen experiment levert nog geen nieuw onderwijsconcept op, maar de volgende stellingen zijn wellicht waard om nader onderzocht te worden:

- Aansprekende, relevante contexten zijn van groot belang bij wiskunde C.

Omdat de leerlingen het een aardig onderwerp vonden waarvan ze ook de relevantie zagen, waren ze naar mijn indruk meer bereid (bijna altijd aanwezige) problemen te overwinnen. Ook was hun eigen inbreng groot en kwalitatief van goed niveau. In alle reacties bleek de affiniteit met het onderwerp.

- Algebraïsche vaardigheden hoeven niet gemeden te worden, vooral als ze ook voor de leerlingen betekenisvol zijn.

In de discussie over algebraïsche vaardigheden gaat het vaak over de vraag, hoe ver je moet/kunt gaan voor de diverse groepen (wiskunde A, B, C, D). Het heeft iets sympathieks om de C-leerlingen wat dit betreft enigszins te ontzien, maar het is m.i. beter om uitgebreid aandacht te besteden aan het *waarom*, en dit in dubbele betekenis:
1. de relevantie van de betreffende vaardigheden,
2. achtergronden van de diverse stappen, bijvoorbeeld bij het herschrijven van een formule.

Bij het tweede punt denk ik onder andere aan het 'weegschaalmodel' dat veel gebruikt wordt bij het oplossen van vergelijkingen, maar ook aan voorbeelden met getallen, liefst in een aansprekende context.

- In plaats van abstracte regels kunnen goedgekozen voorbeelden een gidsfunctie vervullen.

Zeker bij deze groep leerlingen zijn allerlei rekenregels niet geautomatiseerd. Dat komt onder meer tot uiting in fouten als:

$$-(p+q) = -p+q$$
$$a(p+q) = ap+q$$
$$a(p \cdot q) = ap \cdot aq$$
$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c}+b$$
$$\frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{c}$$

Bij het onderzoek naar leesformules moeten deze herhaaldelijk worden 'herschreven', waarbij uiteraard fouten als bovenstaande op de loer liggen. Simpele getallenvoorbeelden, liefst ingekaderd in een aansprekend 'verhaal', kunnen een belangrijke steun zijn. Ten aanzien van de laatste twee soorten fouten kun je denken aan voorbeelden als $\frac{375+200}{2}$ (te interpreteren als het eerlijk delen van twee beloningen) en, als tegenhanger, $\frac{10 \times 25}{2}$ (eerlijk delen van de verdiensten van 10 opdrachten).

- Het kritisch kijken naar formules moet hand in hand gaan met het doorgronden van deze formules.

Het kritisch laten kijken naar formules over onderwerpen waar men iets van weet (zoals de moeilijkheid van teksten) geeft de leerling een veel actievere rol dan wanneer hij de formules alleen maar hoeft te gebruiken, en een beetje begrijpen.

Bij sommige vormen van kritiek is het voldoende om globaal te kijken naar de formule (zoals te constateren dat bij veel leesbaarheidsformules de woordlengte en de zinslengte van belang zijn). Bij meer gedetailleerde kritiek is het noodzakelijk een goed begrip te hebben van de werking van de formules en van de achtergronden.

Hoe verder?

Het ging, zoals gezegd, om een kleinschalig experiment. Er zal nog het een en ander moeten worden besproken en uitgetest voordat de contouren van wiskunde C nieuwe stijl duidelijk worden. Wanneer een collega iets wil doen met (of naar aanleiding van) het materiaal over Leesbaarheid: graag!

Over de auteur
Gerard Koolstra is wiskundeleraar op het St. Michaël College te Zaandam en lid van de werkgroep Wiskunde C van de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO).
E-mailadres: *g.koolstra@chello.nl*

Parate kennis en algebra

[Anne van Streun]

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=2$$

WISKUNDEDIDACTIEK ANNO 2010

Aflevering 4: Formules maken en interpreteren

Oriëntatie

In de 'goede oude tijd' van hbs en mulo verwierven de leerlingen een zekere routine in algebraïsche vaardigheden, maar het zelf maken van een formule of het opstellen van een 'ingeklede' vergelijking stuitte op grote leerproblemen. Je rekende met letters volgens vaste regels, maar die hadden geen betekenis. Van *symbol sense* was amper sprake. Pas na de invoering van wiskunde A en het nieuwe onderbouwprogramma 12-16 is er aandacht gekomen voor het interpreteren en maken van formules. Onze vraag is weer, welke basis aan *parate kennis* op dit gebied noodzakelijk lijkt voor het ontwikkelen van een goed begrip van wat een (letter)variabele is of kan zijn.

Verschillende betekenissen van een letter

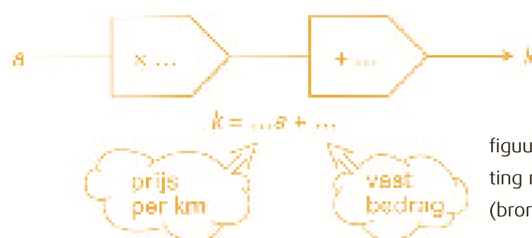
In oudere didactische publicaties en bijvoorbeeld in 'Didactiek van de wiskunde' van Joop van Dormolen (1974) wordt veel werk gemaakt van de verschillende wiskundige en didactische betekenissen van een letter en een variabele. Van Dormolen maakt bijvoorbeeld onderscheid tussen gebonden en vrije variabelen. In 'Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren' (deel II, 1967) pleit Johan Wansink ervoor om de letter a te introduceren als een *willekeurig getal* uit de telrij. We zeggen er niet bij welk getal we met de letter a op het oog hebben. In de algebra gaat het volgens hem om *onbenoemde getallen,* een letter stelt een getal voor dat willekeurig uit een van te voeren aangewezen getalverzameling mag worden gekozen. In de loop van het beginonderwijs in de algebra moet duidelijk onderscheid worden gemaakt tussen een *uitspraak* als $a \cdot b \cdot c = b \cdot c \cdot a$ (waar voor alle waarden van a, b en c) en $x^3 - 4x = 0$ (waar voor slechts enkele waarden van x). *Vergelijkingen* acht hij daarom ongeschikt voor het beginonderwijs in de algebra. Hij acht de aanpak van Bos en Lepoeter in hun 'Wegwijzer in de algebra' wel bevredigend. Zij beginnen direct met het opstellen van *formules* die het verband tussen *grootheden* weergeven en het introduceren van ingewikkelde formules (bijvoorbeeld voor de draagkracht van een hijsbalk), die door substitueren een betekenis krijgen. Dat gebeurt ongeveer zoals wij nu in de onderbouw ook letters gebruiken om een verband tussen grootheden (bijvoorbeeld hoeveelheden) vast te leggen. Maar, zo merkt Wansink op, 'de leerlingen dienen er tijdig voor te worden gewaarschuwd dat in de algebra de letters geen grootheden voorstellen, maar *onbenoemde getallen* die tevoorschijn komen bij metingen en tellingen.'

In de buitenlandse schoolboeken en leerplannen die ik ken wordt altijd uitdrukkelijk onderscheid gemaakt tussen de *nog onbekende* maar vastgelegde waarde van x in een vergelijking en de letters in een formule of in $a + b = 12$. Het steeds weer doorvragen naar de mogelijke betekenis en getalswaarde van een letter in een formule of een vergelijking is een natuurlijke manier om het inzicht van leerlingen in de rol van varabelen te versterken.

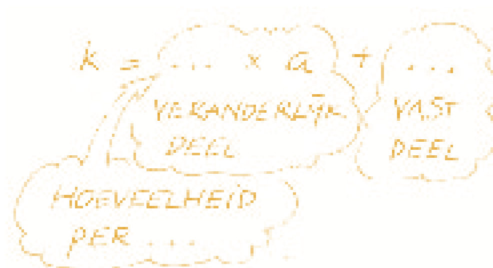
Lineaire formules maken en interpreteren

In alle schoolboeken van vmbo tot en met vwo wordt in de eerste twee leerjaren ruim werk gemaakt van lineaire verbanden en vergelijkingen. De vraag is evenwel wat onze leerlingen in de loop van het tweede leerjaar paraat hebben. Kunnen ze bij een in woorden of door rekenpijlen beschreven lineaire groeicontext direct de formule opschrijven? Of bij een tabel van een lineaire groei? Of bij een grafiek van een lineair verband? Kunnen ze de structuur van een lineaire formule uitleggen en de letters en getallen interpreteren (betekenis geven) in termen van een context? Eenvoudig te toetsen, kleine opgaven, parate kennis, dus bijna alles moet goed zijn!

En omgekeerd, kunnen ze een formule die in een context het verband aangeeft tussen twee grootheden interpreteren in termen van die context? Bij lineaire verbanden is de kern aan de nodige parate kennis nog relatief eenvoudig en dat is het aangewezen beginpunt om leerlingen ervan te overtuigen dat zij die kennis paraat moeten hebben.



figuur 1 Bij een context een pijlenketting maken en de formule opstellen (bron: Wiskunde Lijn, deel 2A mhv)



figuur 2 Een lineaire formule interpreteren in termen van de situatie (bron: Wiskunde Lijn, deel 2A mhv)

Exponentiële formules maken en interpreteren

Voor een leerling is aan het einde van de tweede klas havo-vwo aan het concept van exponentiële groei al een heel netwerk van contexten, representaties en kenmerken gekoppeld. Tenminste, ze zijn in hun schoolboek al het volgende tegen gekomen:

- Contexten met procentuele groei zijn aangepakt met de vermenigvuldigingsfactor: bij 25% toename hoort de factor 1,25.
- Het kenmerk van exponentiële groei wordt in woorden samengevat: de groeifactor bij tijdseenheid is steeds dezelfde.
- In tabellen die het verband tussen twee grootheden beschrijven wordt onderzocht of er sprake is van exponentiële groei.
- De exponentiële formule met beginhoeveelheid en groeifactor wordt opgesteld en geïnterpreteerd.

Na het lineaire verband is het exponentiële verband in de wereld om ons heen het meest voorkomend, terwijl het interpreteren van een formule al stevige eisen stelt aan het begrijpen van hoe de formule in elkaar zit en wat die voorstelt. Zie bijvoorbeeld het volgende fragment uit een opgave van het eindexamen vmbo-GL/TL 2004 [1]:

Het geluidsniveau gemeten aan de voet van de windmolen is 65 dB. Hoe verder iemand zich van de windmolen bevindt, hoe lager het geluidsniveau is. Er bestaat een verband tussen het geluidsniveau en de afstand tot de voet van de windmolen.
Bij dit verband hoort de volgende formule:
$G = 65 \times 0{,}83^a$
Hierin is G het geluidsniveau in dB, en a is de horizontale afstand tot de voet van de windmolen in hectometers.
Met hoeveel procent neemt het geluidsniveau per hectometer af?

Ook hiervoor geldt weer dat er wel van alles in de schoolboeken staat maar dat de kern aan parate kennis over het maken en interpreteren van een exponentiële formule niet paraat lijkt of blijft. Die kern zal herhaald moeten worden en gedurende het hele derde leerjaar getoetst. Met die parate kennis beschikken de leerlingen over het denkgereedschap om ingewikkelder problemen waarin exponentiële verbanden een rol spelen aan te pakken.

Diverse formules maken

Het maken van formules is natuurlijk niet beperkt tot deze twee typen formule bij verbanden. Eenvoudige meetkundige situaties lenen zich goed voor het leren opstellen van formules, evenals patronen en natuurlijk rijtjes van getallen.
In buitenlandse schoolboeken en curricula functioneert het maken van formules bij patronen van figuren en getallen en het interpreteren van dat type formules als een belangrijk didactisch middel om leerlingen vertrouwd te maken met de betekenis van variabelen en symbolen. Het lijkt de moeite waard om daar meer werk van te maken dan nu gebruikelijk is geworden. Zie ook het pleidooi van Pauline Vos in Euclides 82-4 en figuur 4. De gemiddelde Nederlandse leerling blijft achter bij leerlingen uit vergelijkbare landen in het redeneren met en generaliseren van patronen. Toch typisch een zinvolle algebraïsche activiteit die helpt om intuïtief te werken aan *symbol sense*.

Noot

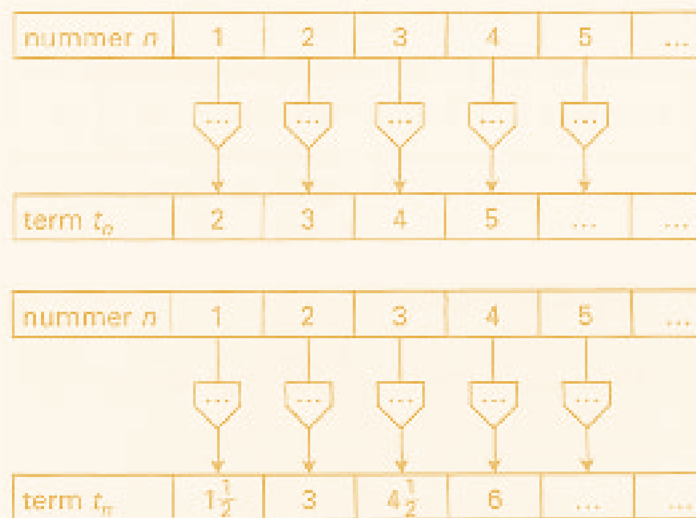
[1] Zie eventueel: *http://downloads.kennisnet.nl/oefenexamens/vmbo/2004/vmbogltl_wi_2004_1_o.pdf*

Verwijzingen

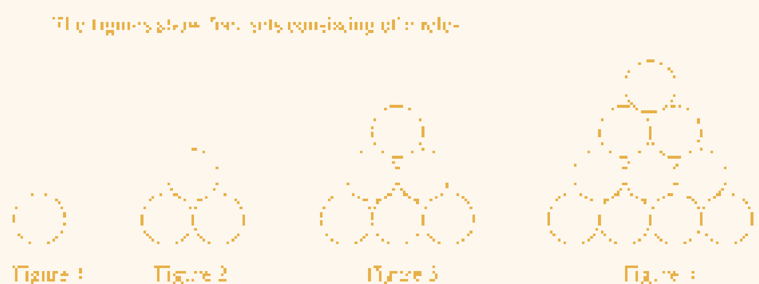
- J. van Dormolen: *Didactiek van de wiskunde*. Oosthoek's Uitgeversmaatschappij (1974).
- P. Vos: *Algebraprestaties van tweedeklassers*. In: *Euclides* 82-4, februari 2007.
- J. Wansink: *Didactische Orientatie II*. Groningen: Wolters (1967).
- Illustraties uit Wiskunde Lijn. Groningen: Wolters-Noordhoff b.v. (1994).

Over de auteur

Anne van Streun is wiskundeleraar sinds 1964, wiskundedidacticus aan de Rijksuniversiteit Groningen sinds 1974, en hoogleraar didactiek bètawetenschappen sinds 2000.
E-mailadres: *avstreun@euronet.nl*



figuur 3 Formules maken bij patronen van getallen (bron: Wiskunde Lijn, deel 2B mhv)



figuur 4 Regelmaat afleiden uit patronen (bron: TIMSS-1999)

Somgetallen, priemgetallen en machten van 2

DEEL 1

[Rob van der Waall en Roger Hendrickx]

Wat zijn somgetallen?

In de wiskunde kennen we een aantal bijzondere getallen[1]. Zo kent iedereen de *even* en de *oneven* getallen. Algemene bekendheid hebben ook de *priemgetallen*, dat wil zeggen de getallen groter dan 1 die alleen 1 en zichzelf als delers hebben[2].
In deze bijdrage houden we ons met de *somgetallen* bezig[3], getallen die als uitkomst zijn verkregen door k opeenvolgende getallen bij elkaar op te tellen, waarbij (let wel!) $k \geq 3$.
Enkele voorbeelden van somgetallen:

$$21 = \underbrace{6+7+8}_{k=3}$$

$$94 = \underbrace{22+23+24+25}_{k=4}$$

Zoals we zien is het niet moeilijk, zelfs flauw, om een somgetal op te schrijven. Een voorbeeld van een somgetal geschreven als som met een stevig aantal termen is:

$$5394 = \underbrace{12+13+14+\ldots+102+103+104}_{k=93}$$

Kan de lezer een somgetal opschrijven dat groter is dan 10.000?
In de volgende paragraaf laten we zien dat het opschrijven van somgetallen, ook van grote, niet zo moeilijk is.

Structuur van somgetallen

We schrijven het volgende somgetal S op:

$$S = \underbrace{24+25+26+27+28+29+30+31+32+33+34}_{k=11}$$

Hoe groot is dit somgetal? We kunnen uiteraard op enigerlei manier de elf termen optellen om de grootte te bepalen, maar het is niet nodig om dat zo te doen. We kunnen namelijk (bijna) uit het hoofd zeggen hoe groot bovenstaand getal is. Daartoe schrijven we het somgetal S nog een keer op, maar dan van achter naar voren, en tellen vervolgens op:

$$\begin{aligned} S &= 24+25+26+27+28+29+30+31+32+33+34 \\ S &= 34+33+32+31+30+29+28+27+26+25+24 \\ 2S &= 58+58+58+58+58+58+58+58+58+58+58 \end{aligned}$$

De som van twee boven elkaar staande termen is telkens 58. Dat is natuurlijk niet zo gek, want in de bovenste som nemen de termen steeds met 1 toe, terwijl de termen in de onderste som steeds met 1 afnemen. Omdat er 11 (= 34 – 23) termen zijn, heeft de optelling 11 × 58 = 638 tot uitkomst. Dit is echter twee keer ons somgetal, zodat de grootte van het somgetal gelijk is aan $\frac{1}{2}\cdot 11\cdot 58 = 319$. Met behulp van bovenstaande methode is het ook niet moeilijk meer om grote somgetallen op te schrijven. Voor het somgetal

$$S = \underbrace{16+17+18+\ldots+\ldots+\ldots+82+83+84}_{k=69}$$

vinden we S = ½·(84 – 15)·(84 + 16) = ½·69·100 = 3450. De volgende (bekende) stelling zegt dat de bovenstaande methode opgaat voor elk somgetal.

Stelling 1. *Voor het somgetal*

$$S = \underbrace{u+(u+1)+\ldots+\ldots+(u+k-2)+(u+k-1)}_{k}$$

geldt $S = \frac{1}{2}k(2u+k-1)$; *hierbij is* $u \geq 1$.

Bewijs. We schrijven het getal S weer twee keer op.

$$\begin{aligned} S &= u + (u+1) + \quad + (u+k-2) + (u+k-1) \\ S &= (u+k-1) + (u+k-2) + \quad + (u+1) + u \end{aligned}$$

Optellen geeft $2S = k(2u+k-1)$ en dus $S = \frac{1}{2}k(2u+k-1)$.
Het begrip somgetal met k termen houdt in dat $u \geq 1$. □

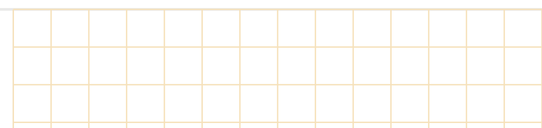
We merken op dat $\frac{1}{2}(2u+k-1)$ het gemiddelde is van de termen in de som. Dit gemiddelde is tevens het middelste getal in de som als het aantal termen oneven is of het gemiddelde van de twee middelste termen indien het aantal termen even is. Ter illustratie hiervan een paar voorbeelden (g is het gemiddelde van de termen in de som):

$$7+8+\underset{g=9}{9}+10+11$$

$$18+19+20+21+22+\underset{g=22}{\ }23+24+25+26$$

$$4+\underset{g=11/2}{5+6}+7$$

$$12+13+\underset{g=29/2}{14+15}+16+17$$



De grootte van een somgetal kan blijkbaar ook bepaald worden op basis van het aantal termen k en het gemiddelde g van deze termen. Voor de somgetallen in het vorige voorbeeld geldt:

$$\underbrace{\overbrace{7+8+9+10+11}^{k=5}}_{g=9} = 5\cdot 9 = 45$$

$$\underbrace{\overbrace{18+19+20+21+22+23+24+25+26}^{k=9}}_{g=22} = 9\cdot 22 = 198$$

$$\underbrace{\overbrace{4+5+6+7}^{k=4}}_{g=11/2} = 4\cdot\frac{11}{2} = 22$$

$$\underbrace{\overbrace{12+13+14+15+16+17}^{k=6}}_{g=29/2} = 6\cdot\frac{29}{2} = 87$$

De bovenstaande stelling hadden we dus ook als volgt kunnen formuleren:

Stelling 2. *Zij S een somgetal. Dan is $S = k\cdot g$, waarbij k het aantal termen in de som is en g het gemiddelde van de termen. Bovendien geldt:*

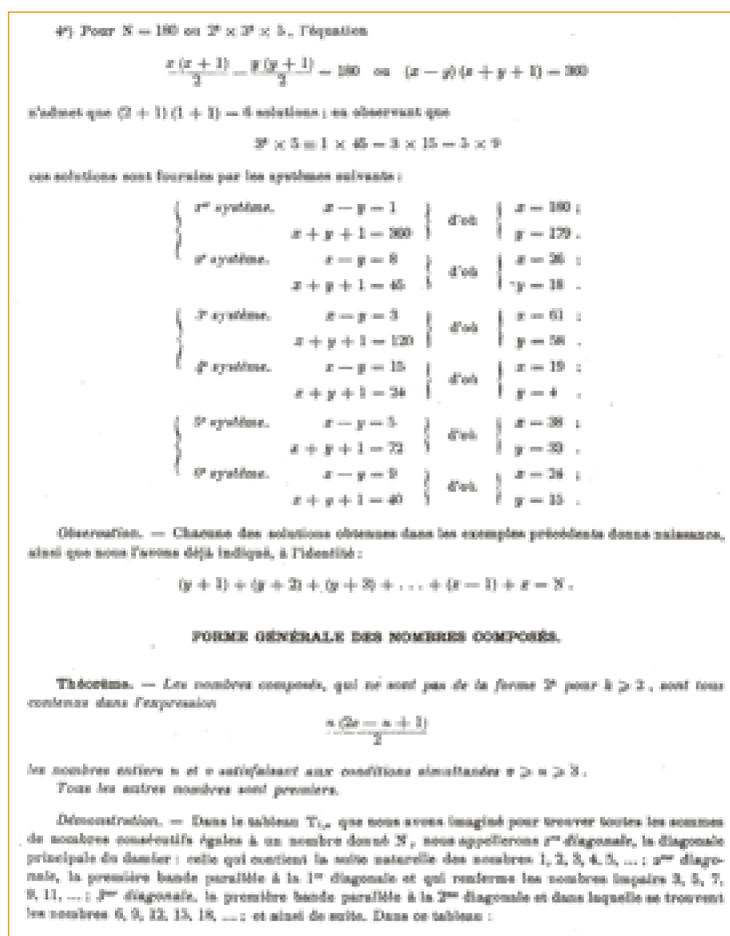
$$g = \begin{cases} \text{voor } k \text{ oneven: de middelste term} \\ \text{voor } k \text{ even: het gemiddelde van de twee middelste termen} \end{cases}$$

en telkens is $2g \geq k+1$. □

Het kleinste somgetal is 1 + 2 + 3 = 6. Het daarop volgende somgetal is 2 + 3 + 4 = 9. De rij van alle somgetallen begint nu als volgt:
6, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, …
Merk op dat het somgetal 10 gelijk is aan 1 + 2 + 3 + 4, een som dus, met vier termen. We zien dat niet alle getallen somgetallen zijn. Immers, 7 en 8 zijn niet te schrijven als som met drie of meer termen. Dat geldt ook voor 16 en 17. De vraag die opkomt is: welke getallen zijn somgetallen en welke niet? In de volgende paragraaf geven we het antwoord op die vraag.

De verzameling van somgetallen

In de vorige paragraaf was gevonden dat 7, 11, 13, 17, 19 geen somgetallen zijn.
Valt er nu een vermoeden te formuleren over getallen die geen somgetal zijn? Zo ja, bewijs dan dat vermoeden.



4°) Pour $N = 180$ ou $2^2 \times 3^2 \times 5$, l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} - \frac{y(y+1)}{2} = 180 \quad \text{ou} \quad (x-y)(x+y+1) = 360$$

n'admet que $(2+1)(1+1) = 6$ solutions ; en observant que

$$3^2 \times 5 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$$

ces solutions sont fournies par les systèmes suivants :

1er système.	$x - y = 1$, $x + y + 1 = 360$	d'où	$x = 180$; $y = 179$.
2e système.	$x - y = 8$, $x + y + 1 = 45$	d'où	$x = 26$; $y = 18$.
3e système.	$x - y = 3$, $x + y + 1 = 120$	d'où	$x = 61$; $y = 58$.
4e système.	$x - y = 15$, $x + y + 1 = 24$	d'où	$x = 19$; $y = 4$.
5e système.	$x - y = 5$, $x + y + 1 = 72$	d'où	$x = 38$; $y = 33$.
6e système.	$x - y = 9$, $x + y + 1 = 40$	d'où	$x = 24$; $y = 15$.

Observation. — Chacune des solutions obtenues dans les exemples précédents donne naissance, ainsi que nous l'avons déjà indiqué, à l'identité :

$$(y+1) + (y+2) + (y+3) + \ldots + (x-1) + x = N .$$

FORME GÉNÉRALE DES NOMBRES COMPOSÉS.

Théorème. — *Les nombres composés, qui ne sont pas de la forme 2^k pour $k \geq 2$, sont tous contenus dans l'expression*

$$\frac{n(2x - n + 1)}{2}$$

les nombres entiers n et x satisfaisant aux conditions simultanées $x \geq n \geq 3$.
Tous les autres nombres sont premiers.

Démonstration. — Dans le tableau $T_{1,n}$ que nous avons imaginé pour trouver toutes les sommes de nombres consécutifs égales à un nombre donné N, nous appellerons 1re diagonale, la diagonale principale du damier : celle qui contient la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, … ; 2me diagonale, la première bande parallèle à la 1re diagonale et qui renferme les nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, … ; 3me diagonale, la première bande parallèle à la 2me diagonale et dans laquelle se trouvent les nombres 6, 9, 12, 15, 18, … ; et ainsi de suite. Dans ce tableau :

figuur 1
Uit Edouard Barbette's proefschrift (zie [4]). Deze Théorème is gelijkwaardig met stelling 7.

De getallen 7, 11, 13, 17, 19 zijn alle priem. Zou het soms zó zijn dat priemgetallen geen somgetallen zijn, dus dat geen enkel priemgetal te schrijven is als som met drie of meer termen? Dit blijkt inderdaad het geval te zijn, zoals de volgende stelling zegt.

Stelling 3. *Priemgetallen zijn geen somgetallen.*

Bewijs. Het enige even priemgetal is 2. Maar 2 is uiteraard niet te schrijven als som met drie of meer termen. Alle andere priemgetallen zijn oneven. Als een priemgetal p een somgetal zou zijn, dan volgt uit stelling 2 dat we p hadden kunnen schrijven als $p = k\cdot g$ waarbij k en g gehele getallen zijn met $k \geq 3$ en $g \geq 2$. Maar dat is onmogelijk omdat p priem is. Een priemgetal is dus geen somgetal. □

We gaan terug naar de rij van alle somgetallen en kijken of er behalve de priemgetallen nog meer getallen in die rij ontbreken. Dat is inderdaad het geval. Er ontbreken in ieder geval 4, 8, 16.
Dit leidt wederom tot een vermoeden. Vraag aan u, lezer, welk vermoeden dat is en hoe dit te bewijzen.

Probeer nu eens 32 of 64 als som te schrijven. Dat lukt niet! Geen van beide is een somgetal. De volgende stelling is namelijk aan de orde:

Stelling 4. *Machten van 2 zijn geen somgetallen.*

Bewijs. Stel dat S een macht van 2 is en dat het een somgetal is. Stelling 2 zegt, dat $S = k\cdot g$, waarbij k het aantal termen in zo'n somschrijfwijze aangeeft; we hebben $k \geq 3$. Het getal $2S = k\cdot 2g$, en $2g$ is een geheel getal; en dus is k zelf een macht van 2 met $k \geq 4$. Echter, ook $2g$ is nu een 2-macht, terwijl (volgens stelling 2) g de helft van een oneven getal is. En dus volgt g = 1.
Voor elk willekeurig somgetal met k termen geldt trouwens dat de bijbehorende g minimaal gelijk is aan 2. Nu is een tegenspraak gevonden met de veronderstelling dat S een somgetal is. En daarmee is de stelling bewezen. □

Ontbreken er in de lijst van somgetallen nog andere getallen dan de priemgetallen en de machten van 2? Hoe zit dat?
Neem een oneven getal in gedachten dat niet priem is, zeg 45. De kleinste priemfactor van 45 is 3; we kunnen namelijk 45 schrijven als 45 = 3·15.

In het licht van stelling 2 is 45 op te vatten als een ontbinding met als k-waarde 3 en als g-waarde 15. Anders gezegd:
45 = 15+15+15 oftewel $45=\underbrace{14+15+16}_{k=3}$

Deze methode werkt voor alle oneven getallen die niet priem zijn.
Bijvoorbeeld: 77 = 7·11. Neem k = 7 en g = 11 zodat:
$77=\underbrace{8+9+10+11+12+13+14}_{k=7}$

Stelling 5. *Alle oneven getallen die niet priem zijn, zijn somgetallen.*

Bewijs. Laat r een oneven getal zijn dat niet priem is. Noem de kleinste priemfactor van dat getal p. Dus zeker $p \geq 3$. En dus is r gelijk aan $p \cdot m$ met m een oneven getal groter dan 1. We kunnen r schrijven als
$r=\underbrace{m+\ldots+m+\ldots+m}_{p\text{-tal termen}}$ en ook als
$r=\underbrace{(m-(p-1)/2)+\ldots+(m-1)+m+(m+1)+\ldots+(m+(p-1)/2)}_{p\text{-tal termen}}$
Omdat door de keuze van p het getal m minstens één priemfactor bevat als deler die groter of gelijk is aan p, volgt dat $m-\frac{p-1}{2}$ inderdaad een (natuurlijk) getal is. (Ga zelf na, dat dit zo is.)
Dus inderdaad, m is somgetal met p termen. □

Kijk nu eens naar even getallen die geen machten van 2 zijn. Zo'n getal heeft dus zeker één of meer oneven getallen tot delers. Anders gezegd, zo'n getal is te schrijven als $m \cdot 2^n$ met $n \geq 1$ en oneven $m \geq 3$. Bijvoorbeeld: 24 = $3 \cdot 2^3$. We kunnen 24 schrijven als som met drie termen met gemiddelde g = 8, als volgt: 24 = 7 + 8 + 9
Voor 120 = $15 \cdot 2^3$ werkt dit evenzo: $120=\underbrace{\ldots+\ldots}_{7}+8+\underbrace{\ldots+\ldots}_{7}$
120 = 1 + 2 + … + 7 + 8 + 9 + … + 14 + 15
Maar bij 44 = $11 \cdot 2^2$ gaat iets dergelijks niet, omdat niet vijf opeenvolgende getallen links van het gemiddelde en niet vijf dito rechts te leggen zijn:
$44\overset{?}{=}\underbrace{\ldots+\ldots}_{5}+4+\underbrace{\ldots+\ldots}_{5}$
Ook voor 184 = $23 \cdot 2^3$ en 656 = $41 \cdot 2^4$ vinden we een analoog probleem. Maar, zoals uit stelling 2 volgt, een even getal $S = m \cdot 2^n$ (met oneven $m \geq 3$ en $n \geq 1$) is een som met m termen met gemiddelde 2^n indien geldt dat $2^n-\frac{m-1}{2}\geq 1$, oftewel indien $2^{n+1}-1\geq m$ opgeld doet.
Als hieraan niet voldaan is, dan blijkt het tóch nog mogelijk te zijn om $m \cdot 2^n$ tot somgetal te verklaren. We illustreren dat aan de hand van het getal $44=2^2\cdot 11=2^3\cdot\frac{11}{2}$.
Proefondervindelijk zien we dat er geldt:

$44=\underbrace{2+3+4}_{3}+\underbrace{5+6}_{2}+\underbrace{7+8+9}_{3}$

Voor $184=2^3\cdot 23=2^4\cdot\frac{23}{2}$ vinden we

$184=\underbrace{4+5+6+7+8+9+10}_{7}+\underbrace{11+12}_{2}+\underbrace{13+14+15+16+17+18+19}_{7}$

Zo'n schrijfwijze als som is nu altijd mogelijk indien in stelling 2 de voorwaarde $g-\frac{k-1}{2}\geq 1$ vervuld is met $k=2^{n+1}\geq 3$ en $2g = m$; anders gezegd, als $m\geq 2^{n+1}+1\geq 3$ vervuld is.
Wel, hoe weten we dat nu zo zeker? Omdat we aangeland zijn bij de volgende stelling.

Stelling 6. *Elk even getal dat niet een macht is van 2, is een somgetal.*

Bewijs. Zij f een even getal, niet een macht van 2. Dan is f te schrijven als $f = 2^n \cdot m$ met geschikte $n\geq 1$ en oneven $m\geq 3$.
Indien nu $m\leq 2^{n+1}-1$ geldt, dan is f somgetal met m termen, en wel als volgt:
$f=\underbrace{\;+\;}_{(m-1)/2}+2^n+\underbrace{\;+\;}_{(m-1)/2}$

En als $m \geq 2^{n+1} + 1$ geldt, dan is f te schrijven als somgetal met 2^{n+1} termen:
$f=\underbrace{\;+\;}_{2^n-1}+(t-1)+t+\underbrace{\;+\;}_{2^n-1}$
waarbij $2t=m+1>2^{n+1}\geq 3$ is. □

Geven we de verzameling somgetallen aan met $\mathcal{S}$, de verzameling van oneven priemgetallen met $\mathcal{P}$ en de verzameling der 2-machten $\{2^i \mid i=0,1,2,\quad\}$ met $\mathcal{M}$ dan geldt:

Stelling 7. *Zij n een natuurlijk getal ongelijk aan 2.*
Dan behoort n tot precies één der verzamelingen $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$.

Met dit mooie resultaat besluiten we deel 1. In een volgend nummer van Euclides zullen we het aantal manieren onderzoeken waarop een somgetal als som geschreven kan worden.

Naschrift
De auteurs spreken hun erkentelijkheid uit jegens Jan Bauwens (Serskamp, België), prof.dr. Harrie C.M. de Swart (Universiteit Tilburg) en dr. Rob Bosch (Koninklijke Militaire Academie te Breda) bij het tot stand komen van dit artikel.

Noten
[1] Het woord 'getal' betekent hier: natuurlijk getal. Dus: (t is een getal) $\Rightarrow$ (t is geheel en $t\geq 1$).
[2] Met 'b is een deler van a' wordt bedoeld dat b, a en a/b alle geheel en positief zijn. Voorbeelden: 7 is deler van 119; 8 is geen deler van 124.
[3] Elk getal dat als uitkomst is verkregen door een k-tal opeenvolgende getallen bij elkaar op te tellen, waarbij $k \geq 3$ noemen we een *somgetal*. Voor dat somgetal zeggen we wel: het is een *som met k termen*. De woorden *somgetal* en *som* worden door ons steeds in bovenstaande connotaties gebruikt.

Literatuur

[4] Edouard Barbette: *Les sommes de p-ièmes puissances distincts égales à une p-ième puissance*. Parijs: Gauthiers-Villars (proefschrift, Luik, 1910). Zie daarin Problème III (pp. 18-25) met betrekking tot stelling 7.
[5] Edouard Barbette: *Sur la décomposition des nombres en facteurs*. In: *L'Enseignement Mathématique (Revue Internationale)*, Vol. 13, 1911, pp. 261-277. Stelling 7 is daarin te vinden op pag. 268.

Over de auteurs

Dr. Robert W. van der Waall was (tot zijn pensionering in 2006) verbonden als universitair hoofddocent algebra aan de Universiteit van Amsterdam, na werkzaam geweest te zijn aan de Gelderse Leergangen en de Katholieke Universiteit Nijmegen. Zijn wiskundige interesse gaat vooral uit naar getallentheorie, groepentheorie, meetkunde en geschiedenis van de wiskunde.
E-mailadres: *waallr@science.uva.nl*
Dr.Ing. Roger L.L. Hendrickx is technisch ingenieur (elektronica) en wiskundige. Sinds 1978 is hij zaakvoerder van het Expertise- en Schaderegelingskantoor Trans Technics Survey te Antwerpen; sinds 1976 staat hij ingeschreven op de lijsten der deskundigen van de Rechtbanken van Antwerpen, Brussel en Gent. E-mailadres: *tts@skynet.be*

[Peter van der Velden]

Basisvaardigheden Wiskunde voor het HTO

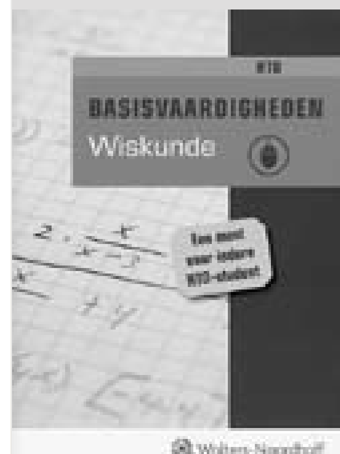
Het eerste wat opvalt is dat het een handzaam, overzichtelijk oefenboekje is. De stof en de oefeningen zijn relevant voor technische hbo-opleidingen. Ik denk dat studenten er veel aan kunnen hebben. De theorie, soms aangevuld met een enkel voorbeeld, staat telkens in 't kort op de linkerpagina, terwijl de oefenopgaven steeds ernaast op de rechterpagina staan. En er zit een CD bij waarmee je per paragraaf een eindtoets kunt maken en naar keuze nóg meer opgaven kunt oefenen. Bovendien kun je beginnen met een instaptoets over de gehele stof, waarna je zelf kunt zien welke paragrafen je nog onvoldoende beheerst. Kortom: een ideale zelfstudiemethode.

De uitleg is echter beknopt en er is soms weinig samenhang tussen de onderwerpen, zodat ik me afvraag of studenten afkomstig van het mbo (en van het havo met alleen wiskunde A) er wel mee uit de voeten kunnen. Maar ook de modale havo-leerling zal er hier en daar moeite mee hebben. Ik zie bijvoorbeeld dat het getal *e* wel erg uit de lucht komt vallen en zonder relevante toepassingen blijft. Voor beklijving is niet alleen oefening nodig. Kennis verwerven in samenhang met andere kennis is ook noodzakelijk, anders worden het al gauw weetjes of trucjes die alras weer vergeten worden.
Daar waar het inderdaad om het opfrissen van havo-stof (wiskunde B) gaat is zo'n korte samenvatting wellicht voldoende om te gaan oefenen, maar sommige onderwerpen in het boekje zijn toch tamelijk nieuw voor de doelgroep. Zo zijn bijvoorbeeld afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies geheel nieuw voor havo-leerlingen die – straks vanaf 2009 – geen examen wiskunde D gedaan hebben.
De oefenopgaven zijn hoofdzakelijk 'kale sommen', hetgeen blijkbaar de bedoeling is van de auteurs. Wil dit soort oefening beklijven dan zal het geoefende ook gebruikt moeten worden in (technische) toepassingen. Die komen in dit boekje maar spaarzaam voor, dus is het wellicht verstandig om de studenten de verschillende onderwerpen te laten oefenen vlak voordat ze bij een ander vakgebied nodig zijn.

Ook lijkt het erop dat de oefeningen bedoeld zijn om zonder grafische rekenmachine (GRM) gemaakt te worden. Zo wordt het – vroeger gebruikelijke – tekenschema van de afgeleide van stal gehaald om minima en maxima te bepalen. Ik kan me voorstellen dat studenten wel erg schrikken wanneer ze met hun basisgereedschap de hogeschool binnenkomen en dat vervolgens niet mogen gebruiken. (Zelfs wanneer men extremen exact moest berekenen, was men gewend om die met de GRM visueel te beoordelen.) Omdat bij veel van de opgaven toch een rekenmachine nodig is, en soms een GRM ter controle wordt aanbevolen, vraag ik mij af hoe de HTO-docent na afloop van het oefenen de toetsen zal afnemen. Ik vraag me bijvoorbeeld af of de auteurs de student die de GRM handig en verantwoord weet te benutten nu wel of niet willen honoreren.

Bij een volgende editie verdient het aanbeveling de software op de CD te verbeteren zodat je onder meer je eigen tussenresultaten kunt behouden nadat je het programma hebt afgesloten.

Als techniekdocent waardeer ik het, dat de auteurs goed hebben afgebakend wat de wiskundige basisvaardigheden voor een hto'er zouden moeten zijn. En in het bijzonder stel ik het op prijs dat men ook aandacht besteedt aan het schattend rekenen en aan het afronden van waarden.



Auteurs: Douwe Jan Douwes, Jaap Grasmeijer
Uitgever: Wolters-Noordhoff, Groningen/Houten (2006)
ISBN 90-01-85013-8
Prijs: € 19,95 (152 pag. + cd-rom)

Over de recensent

Ir. Peter van der Velden, MSc, is werkzaam als trainer/adviseur voor docenten, was docent wiskunde en techniek aan de Hogeschool INHOLLAND Haarlem, heeft veel ervaring met didactiek van wiskunde met ICT, en is nog steeds actief lid van de HBO-werkgroep van de NVvW.
E-mailadres: *p.vd.velden@compaqnet.nl*

BOEKBESPREKING

[Ernst Lambeck]

Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde

(Zebra 21)

In 1829 verschijnt in het Russisch een boek over een nieuwe meetkunde van de hand van Nikolai Ivanovich Lobačevskií (1792-1856); een aantal jaren later wordt het ook in het Duits gepubliceerd. De wiskundige wereld heeft nauwelijks aandacht voor beide werken. Merkwaardig, want met de publicatie van het werk van Lobačevskií komt er een eind aan een eeuwenlange zoektocht. Vanaf de tijd van Euclides heeft men getwijfeld over het vijfde postulaat in zijn Elementen, beter bekend als het parallellenpostulaat.

Vijfde postulaat

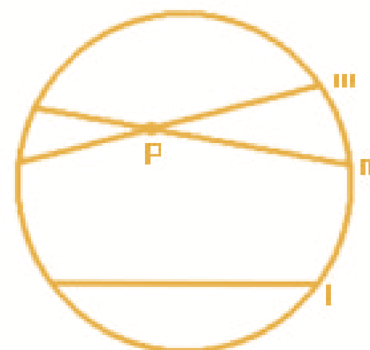
Het vijfde postulaat luidt modern geformuleerd:
Als bij een rechte lijn die twee rechte lijnen snijdt, de som van de binnenhoeken aan dezelfde kant kleiner is dan de som van twee rechte hoeken, dan zullen de twee rechte lijnen tot in het oneindige verlengd elkaar ontmoeten aan de kant waar de hoeken zijn waarvan de som kleiner is dan twee rechte hoeken.
In ***figuur 1*** ziet u de vijf postulaten uit de Elementen in de eerste gedrukte editie uit 1482, met linksonder het plaatje horend bij het parallellenpostulaat.
De eerste vier postulaten waren kort en bondig geformuleerd, het vijfde niet, zoals u zelf zojuist heeft kunnen constateren. Ook heeft Euclides zelf pas vrij laat in de Elementen gebruik gemaakt van dit postulaat. Hierdoor ontstond het vermoeden dat dit vijfde postulaat overbodig zou zijn: het zou wellicht af te leiden zijn uit de overige postulaten. Dit vermoeden hield tal van wiskundigen bezig; pas in de 19de eeuw blijkt uit de publicaties van Lobačevskií dat het vijfde postulaat niet afgeleid kan worden uit de eerste vier.

figuur 1

Auteur: Iris van Gulik - Gulikers
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2005)
ISBN: 90-5041-091-X
Prijs voor niet-leden: € 9,00

Hyperbolische meetkunde

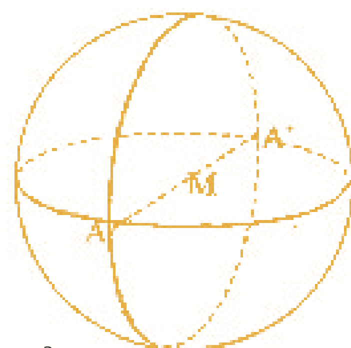
Toch is het werk van al die wiskundigen niet voor niets geweest. Zo heeft de Schot John Playfair (1748-1819) het postulaat geherformuleerd in een voor ons bekendere vorm:
Door een gegeven punt buiten een rechte lijn gaat precies één rechte die evenwijdig is aan de lijn.
In het midden van de 19de eeuw is de wiskundige tijd blijkbaar rijp voor een oplossing van het probleem van het parallellenpostulaat: bijna gelijktijdig met Lobačevskií komt ook János Bolyai (1802-1860) tot een soortgelijke oplossing als Lobačevskií. Ook Carl Friedrich Gauss (1777-1855) heeft aan het parallellenpostulaat gewerkt. Hoewel Gauss over dit onderwerp nooit iets heeft gepubliceerd, kan uit zijn notitieboeken en correspondentie worden opgemaakt dat hij zeker soortgelijke ideeën heeft gehad als Lobačevskií en Bolyai. Zij vervangen het vijfde postulaat door het volgende:
Er zijn meerdere evenwijdige lijnen aan een lijn l door een punt P niet op l.
Daarmee ontwikkelen zij de hyperbolische meetkunde. In de tweede helft van de 19de eeuw komen Beltrami en Klein tot een mooi model van deze meetkunde. Uitgangspunt is een open cirkel. De punten van het binnengebied zijn dan de punten van de meetkunde, de open koorden die punten op de cirkel met elkaar verbinden vormen de lijnen (***zie figuur 2***).



figuur 2

Elliptische meetkunde

De ontkenning van het vijfde postulaat heeft twee mogelijkheden. Óf er zijn meerdere parallelle lijnen óf er zijn geen parallelle lijnen. De eerste optie resulteerde in de hyperbolische meetkunde, de tweede geeft ook een meetkunde: de elliptische. Bernhard Riemann (1826-1866) geldt als de ontdekker van deze variant van de niet-Euclidische meetkunde. Voor een model van deze meetkunde gaan we uit van een bol. Een lijn is een grote cirkel (doorsnede van de bol met een vlak door het middelpunt van de bol), een punt is een puntenpaar bestaande uit een punt van de bol met zijn antipode. In ***figuur 3*** ziet u het punt (*A*, *A*') en een lijn door dit punt.



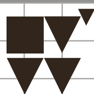
figuur 3

Boekje

Het Zebra-boekje van Van Gulik behandelt bovenstaande geschiedenis. Naar mijn smaak geeft het boekje een aardig beeld van de zoektocht rondom het vijfde postulaat. Een aantal stellingen uit de Elementen passeert de revue, waarbij wordt aangegeven of het parallellenpostulaat wel óf niet nodig is. Ook belicht de auteur enkele pogingen om dit postulaat uit de overige af te leiden. Tenslotte worden bovengenoemde modellen van de hyperbolische en elliptische meetkunde gepresenteerd. Verder komt nog een ander model van de hyperbolische meetkunde aan de orde, namelijk de Poincaré-schijf. Bij het onderzoek van dit model wordt de lezer uitgenodigd het programma Cabri in te zetten. Om Cabri voor dit doel te kunnen gebruiken is een bestand nodig dat de lezer kan downloaden. Het boekje sluit af met een aantal onderzoeksopdrachten.
Bij het boekje is ook een docentenhandleiding beschikbaar. Hierin kan men uitgebreide uitwerkingen vinden van de opgaven, suggesties voor onderzoeksopdrachten en beoordelingsschema's voor verschillende presentatiemogelijkheden. Kortom, het lijkt een goed verzorgd boekje. Toch zijn er wel een aantal slordigheden en omissies te noteren. De belangrijkste omissie is naar mijn mening dat bij de gegeven niet-Euclidische modellen de leerlingen wel moeten controleren dat niet voldaan is aan het parallellenpostulaat, maar dat nergens gerept wordt over het wel of niet gelden van de andere postulaten, hetgeen toch noodzakelijk is om te kunnen concluderen dat het vijfde postulaat echt nodig is in de Euclidische meetkunde!

Afsluitend: toch wel een mooi boekje voor leerlingen (en hun docenten) met interesse in meetkunde.

Over de recensent
Ernst Lambeck is als docent wiskunde werkzaam aan het Newmancollege te Breda. Hij is voor één dag per week gedetacheerd aan de Technische Universiteit Eindhoven. Daarnaast is hij voorzitter van de opgavencommissie van de Kangoeroe. E-mailadres: *e.lambeck@newmancollege.nl*



Van de bestuurstafel

[Wim Kuipers]

WwF
Voor de meeste lezers behoeft het geen uitleg meer waarvoor de letters WwF staan: WereldwiskundeFonds. Al jaren timmert het WwF aan de weg als het gaat om het coördineren van projecten in derdewereldlanden die iets met het wiskundeonderwijs aldaar van doen hebben. We moeten dan denken aan de aanschaf van wiskundeboeken voor bibliotheken en leerlingen voortgezet onderwijs, conferenties of scholing aan wiskundedocenten. Over de projecten en bijbehorende beschrijvingen kunt u terecht op de site van de Vereniging, *www.nvvw.nl*, en dan doorklikken via *Vereniging/Werkgroepen*.
De werkgroep van het WwF zoekt voortdurend naar geschikte projecten om het beschikbare geld goed te besteden. Heeft u contacten met scholen in derdewereldlanden? Of weet u een collega die, misschien voor een bepaalde periode, op een dergelijke school aan de slag is? Een kleine moeite om contact op te nemen met iemand van de werkgroep of een mailtje te sturen naar de secretaris van de werkgroep Wim Kuipers (*w.kuipers@nvvw.nl*).
Het bestuur van de Vereniging wil er op wijzen dat de WwF-werkgroep (als gevolg van vertrek) nieuwe medewerkers zoekt. Men is op zoek naar enthousiaste leden van de NVvW die de werkgroep willen versterken. Wat het aan inspanning kost? In eerste instantie moet u denken aan drie keer per jaar deelnemen aan bijeenkomsten van de werkgroep.
Voor meer informatie kunt u ook terecht bij de secretaris, Wim Kuipers.

Verschenen / Basisboek rekenen

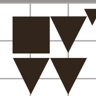


Auteurs: Jan van de Craats, Rob Bosch
Uitgever: Pearsons Education Benelux bv, Amsterdam (2007)
ISBN: 978-90-430-1394-9
Prijs: € 24,95 (VIII +164 pagina's)

Uit de flaptekst – *Basisboek rekenen* is geschreven voor iedereen die er belang bij heeft om goed te kunnen rekenen. Het boek is vooral bedoeld voor het hoger beroepsonderwijs, en is daarnaast ook geschikt voor het vmbo en mbo. Je leert optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen (inclusief de staartdeling), rekenen met kommagetallen en rekenen met breuken. Je leert ook rekenen met geldbedragen, procenten, maten en gewichten. *Basisboek rekenen* is een oefenboek. Elk hoofdstuk bestaat voor de helft uit opgaven.

Examenbesprekingen 2007

[Conny Gaykema]



VMBO TGK
vrijdag 1 juni 2007 15.00-18.00 uur

ALKMAAR
OSG Willem Blaeu
Robonsbosweg 11 (072-5122477)
mw. V. Smit (*d.smit-bruin@atlascollege.nl*)

GRONINGEN
Noorderpoort College
Van Iddelingeweg 140 (050-3656702)
dhr. J. Rijnaard (050-5254709)

ROTTERDAM
Geref. SG Randstad
Valenciadreef 15 (010-2862930) [1]
(*Station NS Alexanderpolder*)
dhr. E. Smid (038-4653400)

ZEIST
KSG De Breul
Arnhemsebovenweg 98 (030-6915604)
voorzitter nog niet bekend

ZWOLLE
Thorbecke SG
Dr. C.A. van Heesweg 1 (038-4564540)
(*parkeren achter de school*)
dhr. R. Kronenberg (038-4210044)

HAVO A12
maandag 4 juni 2007 16.00 - 18.00 uur
HAVO B1 / B12
vrijdag 1 juni 2007 15.30 - 18.00 uur

AMERSFOORT
S.G. Guido de Brès
Paladijnenweg 251 (033-4792900)
A: dhr. F.O. van Leeuwe (0341-492843)
B: dhr. A.B. v.d. Roest (0318-543167)

AMSTERDAM
CSG Buitenveldert
De Cuserstraat 3 (020-6423902)
(*CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51*)
A: dhr. N.M. Admiraal (072-5340613)
B: dhr. S.T. Min (0229-237756)

's-GRAVENHAGE
Hofstad Lyceum
Colijnplein 9 (070-3687670)
A: dhr. J.P.C. v.d. Meer
B: dhr. R.J. Klinkenberg (070-3559938)

GRONINGEN
Röling College
Melisseweg 2 (050-5474141)
A: dhr. L. Tolboom (050-3146093)
B: mw. H. Lüder (0516-432889)

ROTTERDAM
Geref. SG Randstad
Valenciadreef 15 (010-2862930) [1]
(*Station NS Alexanderpolder*)
A: dhr. R. van Oord (0182-617089)
B: dhr. H. J. van Lien (010-5113530)

ZWOLLE
Van der Capellen SG
Lassuslaan 230 (038-4225202)
A: dhr. C. Alderliesten (038-4657244)
B: zie hieronder

ZWOLLE
Thorbecke SG
Dr. C.A. van Heesweg 1 (038-4564560)
(*parkeren achter de school*)
A: zie hierboven
B: dhr. Ph. Thijsse (0315-342436)

VWO A1 / A12
dinsdag 5 juni 2007 15.30-18.00 uur
VWO B1 / B12
dinsdag 22 mei 2007 15.30-18.00 uur

AMERSFOORT
SG Guido de Brès
Paladijnenweg 251 (033-4792900)
A: mw. K.A. Blom (033-4480705)
B: dhr. F. v.d. Heuvel (030-2730898)

AMSTERDAM
CSG Buitenveldert
De Cuserstraat 3 (020-6423902)
(*CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51*)
A: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)
B: mw. G.W. Fokkens (020-6438447)

Regio Arnhem: ROZENDAAL
Het Rhedens
Kleiberglaan 1 (026-3646845)
A: geen bijeenkomst
B: dhr. A.W.M. Tromp (026-3254829)

's-GRAVENHAGE
Hofstad Lyceum
Colijnplein 9 (070-3687670)
A: dhr. L. Bes (010-5110254)
B: dhr. J. Remijn (070-3684525)

GRONINGEN
Röling College
Melisseweg 2 (050-5474141)
A: mw. N. den Braber (050-5893847)
B: mw. O. Eringa (0512-519160)

's-HERTOGENBOSCH
Ds. Pierson College
G. ter Borchstraat 1 (073-6442929)
(*NS Den Bosch-OOST*)
A: geen bijeenkomst
B: dhr. H.J. Kruisselbrink (073-5216386)

ROTTERDAM
Geref. SG Randstad
Valenciadreef 15 (010-2862930) [1]
(*Station NS Alexanderpolder*)
A: dhr. B.L.G.P. Hillebrand (0180-515210)
B: mw. A.E.L. de Jongh Swemer (010-4138432)

ZWOLLE
Van der Capellen SG
Lassuslaan 230 (038-422520)
A: dhr. L. Rietveld (055-5419287)
B: dhr. A.T. Sterk (055-3666466)

Noot
[1] Parkeren op parkeerterrein Almeria-erf 8 is toegestaan.

RECREATIE

Puzzel 826

Heron en Descartes

[Frits Göbel]

Aan de Griekse wiskundige Heron wordt de volgende fraaie formule voor de oppervlakte D van de driehoek met zijden *a*, *b*, *c* toegeschreven:

$$D = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

waarin s de halve omtrek van de driehoek is.

Voor veel waarden van *a*, *b*, *c* komt hier een geheel getal uit. Dat is niet verwonderlijk, want het komt er op neer dat een diofantische vergelijking van de tweede graad met vier variabelen veel oplossingen heeft.
Het standaardvoorbeeld is het drietal 13, 14, 15 met oppervlakte 21.
Een ander voorbeeld, ook met drie opvolgende getallen, is 3, 4, 5 met oppervlakte 6.

Opgave 1
Bepaal een derde drietal opvolgende getallen waarvoor de formule van Heron een geheel getal oplevert.

Voor de volgende opgave gaan we uit van een rechthoekig blok van $a \times b \times c$. Hierin brengen we een vlak aan door de drie buurpunten van een willekeurig hoekpunt. De doorsnede met het blok is natuurlijk een driehoek; ***zie figuur 1***.

Opgave 2
Bepaal de oppervlakte *D(a, b, c)* van deze driehoek.

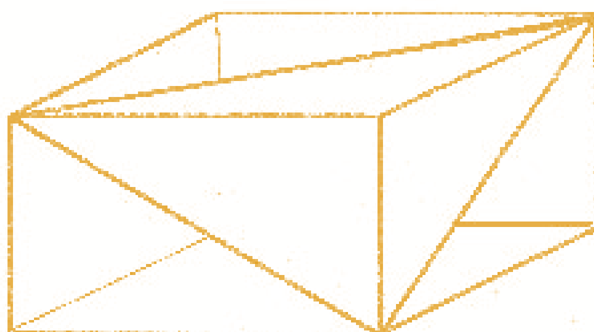
Het antwoord, voor het eerst gevonden door Descartes, is een wortelvorm. Ook deze heeft voor veel drietallen *a, b, c* een gehele uitkomst.

Opgave 3
Bepaal $2{\cdot}D(a, b, a+b)$ als functie van a en b.

Omdat opgave 3 zo eenvoudig is, volgt er hier nog eentje, geïnspireerd door het antwoord op opgave 2.

Opgave 4
Bepaal alle $n < 500$ waarvoor de vergelijking
$n = xy + xz + yz$
geen oplossingen heeft in *x, y, z* geheel en > 0.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing; bovendien worden er twee zomerprijzen verloot onder de trouwe inzenders.
De deadline is 1 mei 2007.
Veel plezier!



figuur 1

Oplossing 824

Producten van twee priem-getallen

Er waren elf inzendingen, waarvan zeven volledig. Van Hans Klein ontving ik een 'modeloplossing', en nog wel op de dag waarop ik het betreffende nummer van Euclides ontving! Verdere volledige oplossingen kwamen binnen van Ton Kool, H.J. van Weers (een nieuwe oplosser; hartelijk welkom!), Lieke de Rooij, Jan Meerhof, Wobien Doyer en Herm Jan Brascamp.
De opgaven 1, 2 en 4 waren heel goed zonder computer te doen. Deze werden door alle inzenders, met of zonder computer, correct opgelost.
Het eerste rijtje dat aan opgave 1 voldoet, is 213, …, 219. Deze oplossing werd door iedereen gevonden. Het is handig om eerst even na te gaan dat het middelste getal deelbaar door 36 moet zijn.
Het bewijs dat in opgave 2 werd gevraagd, gaf ook geen problemen. De aanpak was globaal gesproken steeds dezelfde. Het bewijs loopt het soepelst als je meteen modulo 12 rekent.
Opgave 3 was voor sommigen een struikelblok. De kleinste oplossing begint bij 143095. Die werd door zes oplossers gevonden. Ton Kools oplossing begint bij 159928229, zodat ik wel even bezig was om de juistheid te controleren! H.J. van Weers stuurde 2 rijtjes in, Wobien Doyer 11, en Hans Klein zelfs 49.
Het tweede rijtje in grootte begint bij 1516533, en dat is dus heel wat verder dan het eerste.
Een vreemde eend in de bijt is het volgende rijtje dat iemand stuurde. Het begint bij 1761, maar het bevat behalve twee viervouden en een zesvoud ook 3×589 en 7×253 (!).

Opgave 4 was weer eenvoudig. Eerst ga je na dat alleen het eerste getal het kwadraat kan zijn. En natuurlijk is dat het kwadraat van een priemgetal, zeg p. Als p op 3 of 7 eindigt, is het tweede getal van het trio deelbaar door 10. Dus alleen 11, 19, 29 en 31 moeten worden bekeken. Lieke de Rooij zette de rij 11, 29 nog voort met 79, 271, 379, 461, 521, 631, 739, 881 en 929.
Herm Jan Brascamp merkte op dat hoogstens *zeven* opvolgende getallen het product van *drie* priemgetallen kunnen zijn; hij bepaalde ook het eerste rijtje: 211673, …, 211679.

Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
T. Kool 396
W. v.d. Camp 382
H.J. Brascamp 372
J. Meerhof 364
L. de Rooij 234
G. Riphagen 192
L.H. v.d. Raadt 141
H. Klein 123
N. Wensink 120
De volledige ladderstand is te vinden op de website van Euclides (*www.nvvw.nl/euclladder.html*).

Helaas had ik de vorige keer vergeten de ladderprijs aan Ton Kool toe te kennen. De toekenning heeft inmiddels plaats gevonden; de ladderstand op de website en hierboven zal ik de volgende keer gecorrigeerd hebben.

SERVICEPAGINA

Examens 1e tijdvak

wo	16-05:	vwo	B1/B12
do	24-05:	vmbo	BB
wo	30-05:	vmbo	KB/GT
wo	30-05:	havo	B1/B12
do	31-05:	havo	A12
vr	01-06:	vwo	A1/A12

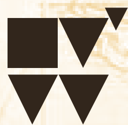
Regionale examenbesprekingen

Zie pag. 241 in dit nummer.

Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php*

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie *www.wiskundeonderwijs.nl*

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*

Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

nr.	verschijnt	deadline
7	24 mei 2007	3 april 2007
8	21 juni 2007	8 mei 2007

maandag 16 april
Studiedag Exact: Aansluiting vmbo-mbo
Organisatie Stichting Consortium Beroepsonderwijs

woensdag 18 april, op de scholen
Grote Rekendag (meetkunde, patronen, kunst)
Organisatie FIsme

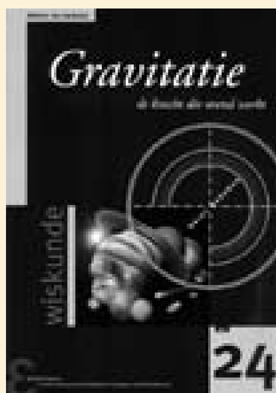
vrijdag 20 april, Amsterdam
Docentencursus: De werkelijkheid in een digitale doos
Organisatie UvA

maandag 23 april, Utrecht
Studiedag VO-HO aansluiting wiskunde
Organisatie NKBW en SIGMA

zaterdag 12 mei, Utrecht
Symposium XIII: Nieuwe problemen, oude oplossingen
Organisatie HKRWO
Zie pag. 168 in Euclides 82(5).

do. 31 mei t/m za. 2 juni, Nijmegen
Geometry days
Organisatie Radboud Universiteit Nijmegen

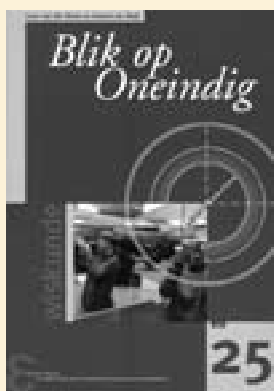
vr. 24 en za. 25 augustus, Eindhoven
vr. 31 augustus en za. 1 september, Amsterdam
Vakantiecursus 2007: Wiskunde in beweging
Organisatie CWI



Ondertitel: De kracht die overal werkt
Auteur: Wilfried Van Herterijck
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2007)
ISBN: 978-90-5041-098-4
Prijs: € 9,00 (60 pag.)
Prijs voor NVvW-leden: € 8,00 (per post)

Verschenen / Gravitatie (Zebra 24)

Flaptekst – Zwaartekracht, je hebt er dagelijks mee te maken en je kunt zelfs niet zonder. Toch sta je er waarschijnlijk niet zo vaak bij stil dat bijvoorbeeld voetballen alleen door die kracht mogelijk is. Gravitatie houdt niet alleen op aarde alles netjes op zijn plaats, maar zorgt er ook voor dat onze planeet rond de zon draait en een atmosfeer heeft die leven mogelijk maakt. Wetenschappers proberen al eeuwen de zwaartekrachtwerking te doorgronden.
In deze Zebra volg je hun spoor en doe je verrassende ontdekkingen over dit dagelijkse fenomeen. Wiskunde blijkt hierbij onmisbaar te zijn. Tal van voorbeelden en opgaven illustreren de theorie en helpen een beter inzicht te verkrijgen.



Auteurs: Leon van den Broek, Arnoud van Rooij
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2007)
ISBN: 978-90-5041-099-1
Prijs: € 9,00 (60 pag.)
Prijs voor NVvW-leden: € 8,00 (per post)

Verschenen / Blik op Oneindig (Zebra 25)

Flaptekst – "Oneindig" is een handig woord om in het dagelijks leven aan te geven dat je "heel erg veel" bedoelt. In deze Zebra worden de betekenis en gevolgen van oneindig nauwkeuriger onderzocht. "Oneindig" is een eeuwenoud begrip met duidelijk filosofische en theologische aspecten, waarover velen zich al hebben gebogen.
Ook in de wiskunde speelt "oneindig" een rol, zowel bij processen die niet na een eindig aantal stappen aflopen, als in oneindig grote hoeveelheden. Door nauwkeurig te formuleren en redeneren wordt op een aantal gebieden het mysterie "oneindig" opgelost. Natuurlijk komen er in dit boekje vragen voor, om zelf ook eens over "oneindig" te peinzen.

Over de Zebra-reeks
De Zebra-reeks is ontstaan naar het idee van Jan Breeman om VWO-leerlingen in keuze-uren kennis te laten maken met onderwerpen die buiten het standaardcurriculum vallen, maar die wel zeer de moeite waard zijn. De reeks is in eerste instantie bedoeld voor leerlingen uit de hoogste klassen van het VWO, maar is nadrukkelijk ook gericht op een ieder die belangstelling heeft voor wiskunde en wiskundige toepassingen in andere disciplines.
De reeks wordt uitgebracht in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.